

DORU PĂUNESCU
LIVIU CĂDARIU
MARIA JIVULESCU
CAMELIA ARIEȘANU
ANANIA GÎRBAN
ADINA JURATONI
CAMELIA PETRIȘOR
NICOLAE LUPA

ROMEO NEGREA
GHEORGHE ȚIGAN
TUDOR BÎNZAR
CRISTIAN LĂZUREANU
OLIVIA BUNDĂU
CIPRIAN HEDREA
ANDREI ECKSTEIN

CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

**pentru examenul de admitere la
UNIVERSITATEA POLITEHNICA
TIMIȘOARA**

**EDITURA POLITEHNICA
2019**

PREFAȚĂ

Prezenta culegere de probleme de matematică se adresează cu precădere elevilor de liceu care urmează o pregătire sistematică pentru examenul de admitere la o parte din Facultățile Universității Politehnica Timișoara. Cunoscut fiind faptul că una dintre disciplinele fundamentale în pregătirea unui viitor inginer este matematica, rezolvarea problemelor propuse conduce la dezvoltarea competențelor necesare viitorului student la Politehnică.

Problemele propuse acoperă în mare măsură conținuturile impuse prin programele analitice de Ministerul Educației Naționale. În același timp s-a ținut cont și de manualele alternative de matematică utilizate în circuitul liceal.

Deși problemele propuse sunt de tip grilă cu șase răspunsuri, doar unul fiind corect, o parte din ele urmăresc tipurile de probleme date la probele de matematică ale examenului de Bacalaureat din ultimii ani. Din acest motiv prezenta culegere poate fi utilizată și la pregătirea examenului de Bacalaureat dar și a unor concursuri școlare.

Ca structură, cartea are trei părți: *Probleme de algebră*, *Probleme de trigonometrie și geometrie plană*, respectiv *Probleme de analiză matematică*.

În finalul culegerii sunt prezentate subiectele, cu rezolvările integrale, date în perioada 2014 – 2019 la concursul de admitere la Facultatea de Automatică și Calculatoare și la Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologii Informaționale, din cadrul Universității Politehnica Timișoara.

Autorii

Cuprins

PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)	9
PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)	99
PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ (simbol AM)	117
ANEXE	
Subiectele date la admitere în anii 2014, 2015, 2016, 2017, 2018 și 2019 cu rezolvările integrale	176
BIBLIOGRAFIE	235

PROBLEME DE ALGEBRĂ (simbol AL)

AL 1 Să se calculeze

$$\{3, 3\} + \{-3, 3\},$$

unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

- a) 0 b) 0,3 c) 0,6 d) 6,6 e) 1 f) -1

AL 2 Fie $A = (\sqrt{2}, 100 - \sqrt{2})$ și $B = (\sqrt{5}, 100 + \sqrt{5})$. Câte numere naturale conține mulțimea $A \cap B$?

- a) 96 b) 97 c) 100 d) 101 e) 197 f) o infinitate

AL 3 Să se determine suma soluțiilor ecuației

$$|x| + |x + 2| = 3.$$

- a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2 f) 3

AL 4 Câte numere întregi se găsesc în mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R}, |2x - 3| \leq 6\} ?$$

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6 f) 5

AL 5 Să se determine cea mai mare valoare a numărului natural n pentru care este verificată inegalitatea $(x + 2y)^2 \geq nxy$ oricare ar fi numerele reale x și y .

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8 f) nu există

AL 6 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} \geq 0.$$

- | | | |
|--------------------------------|--------------------|--------------------|
| a) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$ | b) $(-\infty, -1)$ | c) \mathbb{R} |
| d) \emptyset | e) $(1, +\infty)$ | f) $(-\infty, -2)$ |

AL 7 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care

$$\sqrt{x+8} \leq x+2.$$

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------|-------------------|
| a) $[1, \infty)$ | b) $[-8, -4] \cup [1, \infty)$ | c) $[-8, -4]$ |
| d) $(-\infty, -4] \cup [1, \infty)$ | e) $(-\infty, -4]$ | f) $[-2, \infty)$ |

AL 8 Să se determine toate valorile nenule ale parametrului real a astfel încât ecuația

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{ax^2 - 2x - \frac{1}{a}} = 0,$$

să aibă cel puțin o soluție reală.

- | | | |
|-------------------------|---------------------|-------------------------------|
| a) 2 | b) $1 \pm \sqrt{2}$ | c) $\frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ |
| d) $-2, 1 \pm \sqrt{2}$ | e) $2 \pm \sqrt{2}$ | f) $0, 1 \pm \sqrt{2}$ |

AL 9 Să se găsească mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x + 1.$$

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$ | b) $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$ | c) $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$ |
| d) $[-1, +\infty)$ | e) \emptyset | f) $(-1, +\infty)$ |

AL 10 Fie ecuația

$$x^2 + |x| = mx(x + 3), \quad m \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului m astfel încât această ecuație să aibă exact trei soluții reale diferite.

- | | | |
|-------------------|-------------------------------------|---------------------------------|
| a) \mathbb{R} | b) $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ | c) \emptyset |
| d) $(-\infty, 1]$ | e) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ | f) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ |

AL 11 Să se determine suma elementelor mulțimii

$$\left\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3 - 3x + 2}{2x + 1} \in \mathbb{Z}\right\}.$$

- | | | | | | |
|---------|---------|---------|--------|--------|--------|
| a) -5 | b) -4 | c) -1 | d) 0 | e) 2 | f) 5 |
|---------|---------|---------|--------|--------|--------|

AL 12 Știind că a este un parametru real, să se determine mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$x^2 - x(a^2 + \sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}a^2 + \sqrt{2} = 0.$$

- | | | |
|----------------------------|-----------------|----------------------|
| a) $\{\sqrt{2}, a^2\}$ | b) $\{1, a^2\}$ | c) $\{\sqrt{2}, a\}$ |
| d) $\{\sqrt{2}, a^2 + 1\}$ | e) $\{1, a\}$ | f) $\{2, a\}$ |

AL 13 Să se găsească mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{1 - x - 2x^2} = -x - 1.$$

- | | | |
|-------------|----------------|---------------|
| a) $\{1\}$ | b) $\{0, -1\}$ | c) $\{0, 2\}$ |
| d) $\{-1\}$ | e) \emptyset | f) $\{0\}$ |

AL 14 Să se determine mulțimea tuturor soluțiilor reale ale ecuației

$$\sqrt{2x^3 - x^2 - 2x + 1} = x + 1.$$

- | | | |
|-------------------|-------------------------|---------------------------------|
| a) $\{-1, 0, 1\}$ | b) $\{-1, 1, 2\}$ | c) $\{-1, 0, 2\}$ |
| d) $\{0, 1, 2\}$ | e) $\{0, 1, \sqrt{2}\}$ | f) $\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ |

AL 15 Andrei și Cristian joacă un joc în care persoana care pierde o rundă îi dă celuilalt jumătate din punctele pe care le are în acel moment. Ei încep jocul cu $4a$, respectiv $4c$ puncte. Dacă Andrei câștigă prima rundă, iar Cristian o câștigă pe a doua, câte puncte are Cristian la sfârșitul celei de-a doua runde?

- a) $2c$ b) $2c + a$ c) $2a + c$ d) $3c + a$ e) $3c + 2a$ f) $2c + 2a$

AL 16 Valer pleacă la școală având suma de x lei cu el, unde x este un număr natural din intervalul $(2, 6]$ și cheltuiește $\frac{2}{x-2}$ din aceasta. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua x , dacă el se întoarce acasă fără datorii.

- | | | |
|---------------------|------------------|------------------|
| a) $\{3, 4, 5, 6\}$ | b) $\{3, 4, 5\}$ | c) $(2, 6]$ |
| d) $\{3, 4\}$ | e) \emptyset | f) $\{4, 5, 6\}$ |

AL 17 Maria cheltuiește $\frac{3}{8}$ din salariul său lunar pe chirie și $\frac{5}{12}$ pe mâncare. Ana, care câștigă dublu față de Maria, cheltuiește un sfert din salariul său pe chirie și jumătate pe mâncare. Cele două fete decid să doneze restul banilor din salariul pe o lună. Care este raportul dintre suma totală donată și suma pe care o câștigă fetele împreună?

- | | | | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| a) $\frac{17}{72}$ | b) $\frac{17}{24}$ | c) $\frac{17}{48}$ | d) $\frac{23}{24}$ | e) $\frac{23}{72}$ | f) $\frac{23}{48}$ |
|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|

AL 18 Dacă $a = b \cdot c^2$, c scade cu 20%, iar a rămâne constant, cu ce procent crește b ?

- | | | |
|-----------|---------|--------|
| a) 56,25% | b) 40% | c) 20% |
| d) 0,025% | e) 0,5% | f) 60% |

AL 19 Suma totală de bani depusă la Smart Bank se mărește de 10 ori pe parcursul unui an, timp în care numărul conturilor deschise scade cu 20%. Cu ce factor crește suma medie depusă în fiecare cont?

- | | | | | | |
|------|------|--------|-------|---------|-------|
| a) 2 | b) 8 | c) 9,8 | d) 12 | e) 12,5 | f) 13 |
|------|------|--------|-------|---------|-------|

AL 20 Prețul transportului pentru o comandă mai mică sau egală cu p lei este s lei. Pentru comenzi ce depășesc p lei se percepe o taxă suplimentară de 5% din ce depășește p lei. Dacă valoarea comenzii este x lei ($x > p$), care este prețul transportului?

- | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) $s + 0,05x$ | b) $s + 0,05p$ | c) $0,05(s - p + x)$ |
| d) $s + 0,05(x - p)$ | e) $s + 0,05(p - x)$ | f) $s + 0,05(x + p)$ |

AL 21 Să se calculeze

$$E_1 = \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} \quad \text{și} \quad E_2 = |x_1 - x_2|,$$

unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 - x - a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

- | | |
|---|--|
| a) $E_1 = -\frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a}$ | b) $E_1 = -\frac{1+3a}{a^3}, E_2 = \sqrt{1+4a}$ |
| c) $E_1 = -\frac{1+3a^2}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ | d) $E_1 = \frac{1+3a}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ |
| e) $E_1 = \frac{1+3a^2}{a^6}, E_2 = \sqrt{1+4a^2}$ | f) $E_1 = -\frac{1}{a^2}, E_2 = \sqrt{1+4a}$ |

AL 22 Fie ecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + a^2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine o relație independentă de a între x_1 și x_2 .

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 + x_1x_2$ | b) $(x_1 + x_2)x_1x_2 = 1 - x_1x_2$ |
| c) $x_1 - x_2 = 2 + x_1x_2$ | d) $x_1x_2 = 1 + x_1 + x_2$ |
| e) $(x_1 - x_2)x_1x_2 = 3 + x_1x_2$ | f) $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_1x_2$ |

AL 23 Fie ecuația

$$x^2 - x - a = 0, \quad a \in \mathbb{R}^*$$

cu soluțiile x_1 și x_2 . Să se determine o ecuație de gradul doi în variabilă y ce are soluțiile $y_1 = \frac{x_1^2}{x_2}$ și $y_2 = \frac{x_2^2}{x_1}$.

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $y^2 - \frac{1+2a}{a}y - a = 0$ | b) $y^2 + \frac{1+3a}{a}y - a = 0$ |
| c) $y^2 - \frac{1+3a}{a}y - a = 0$ | d) $y^2 - \frac{1+2a}{a}y - a^2 = 0$ |
| e) $y^2 - \frac{1+3a}{a}y - a^2 = 0$ | f) $y^2 + \frac{1+4a}{a}y - a = 0$ |

AL 24 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real nenul a știind că inecuația

$$ax^2 - (a + 1)x + 1 \geq 0$$

este verificată pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|-------------------|-------------------|----------------|
| a) $(-\infty, 1]$ | b) $[1, +\infty)$ | c) $\{1\}$ |
| d) $(0, 1]$ | e) \mathbb{R} | f) \emptyset |

AL 25 Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a , știind că $A \cap B$ are un singur element.

- a) $(-\infty, 1]$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{1\}$ e) \mathbb{R} f) \emptyset

AL 26 Fie $a \in \mathbb{R}$ și mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a \leq 0\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (2a+1)x + 2a = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a , știind că intersecția $A \cap B$ are exact două elemente.

- a) $\{1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$
d) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ e) \emptyset f) $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

AL 27 Se consideră un pătrat de arie S_1 . Mijloacele laturilor acestui pătrat sunt vârfurile unui alt pătrat, a cărui arie o notăm cu S_2 . În același mod, construim succesiv un șir de pătrate ale căror arii le notăm cu $(S_n)_{n \geq 1}$ (la fiecare pas construim pătratul de arie S_n ca fiind pătratul care are drept vârfuri mijloacele laturilor pătratului precedent, cel de arie S_{n-1}). Să se determine cel mai mare număr natural nenul n pentru care $2017S_n \geq S_1$.

- a) 1 b) 10 c) 11 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 28 Discriminantul unei ecuații de gradul II cu coeficienți întregi nu poate fi

- a) -2015 b) -2016 c) 112 d) 2016 e) 2017 f) 2018

AL 29 Câte dintre submulțimile lui $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ conțin exact un număr impar?

- a) 5 b) 16 c) 32 d) 64 e) 37 f) 160

AL 30 Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$\frac{2x + 5x^2 + 8x^3}{x^2} \quad \text{pentru } x > 0.$$

- a) 0 b) 2 c) 8 d) 13 e) 15 f) 22

AL 31 Fie a, b, c numere reale nenule. Să se determine soluțiile ecuației

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

- | | |
|---|---|
| a) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$ | b) $\frac{2c}{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}$ |
| c) $\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ | d) $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ |
| e) $-\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{a}$ | f) niciuna dintre acestea |

AL 32 Câte triplete (a, b, c) de numere întregi verifică inecuația

$$(a - 1)(a - 3) + (b - 5)(b - 7) + (c - 9)(c - 11) < 0?$$

- a) 0 b) 1 c) 6 d) 12 e) 18 f) 19

AL 33 Să se formeze ecuația de gradul al doilea cu rădăcinile

$$y_1 = \frac{x_2^3}{x_1^2} \text{ și } y_2 = \frac{x_1^3}{x_2^2},$$

știind că x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2 + x - a = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$.

a) $y^2 + \frac{5a^2 + 1}{a^2} y + a = 0$

b) $y^2 - \frac{1}{a^2} y - a = 0$

c) $y^2 + a = 0$

d) $y^2 + \frac{5a^2 + 5a + 1}{a^2} y - a = 0$

e) $y^2 - a = 0$

f) $y^2 - 2a + 3 = 0$

AL 34 Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}} \right] = \frac{1}{[x]},$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

a) $\left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$

b) $\bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left[k, k + \frac{1}{k} \right]$

c) $\{n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$

d) $\{1\}$

e) $[0, 1]$

f) $(0, 1)$

AL 35 Să se calculeze suma soluțiilor ecuației

$$\left[\frac{5 + 6x}{8} \right] = \frac{15x - 7}{5}.$$

a) $\frac{19}{15}$

b) $\frac{20}{15}$

c) $\frac{14}{15}$

d) 1

e) $\frac{13}{15}$

f) $\frac{10}{15}$

AL 36 Să se calculeze media aritmetică a soluțiilor ecuației

$$[x] + [2x] + [3x] = 4x.$$

a) 0

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{3}{8}$

d) $\frac{5}{12}$

e) $\frac{7}{16}$

f) 1

AL 37 Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației

$$[a]^2 - (2a - 1)[a] + 3a = 0.$$

- a) $[-1, 4] \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ b) $[0, 4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ c) $[0, 5)$
d) $\{-3, -2, 0, 4, 5\}$ e) $(-1, 4] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$ f) $\{0, 4\}$

AL 38 Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se determine ordinea crescătoare a numerelor

$$a = \sqrt{n} + \sqrt{n+5}, \quad b = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+4}, \quad c = \sqrt{n+2} + \sqrt{n+3}.$$

- a) a, b, c b) a, c, b c) b, a, c d) b, c, a e) c, a, b f) c, b, a

AL 39 Se consideră șirul de numere raționale pozitive

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

Să se determine al câtelea termen al șirului este numărul $\frac{2016}{2015}$.

- a) 8120450 b) 8118435 c) 2015
d) 2016 e) 8000111 f) 8000

AL 40 Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică relațiile

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1, \quad x_n x_{n-2} + x_{n-1} = 2, \quad n \geq 3.$$

Să se calculeze $x_1 + x_2 + \dots + x_{2016}$.

- a) 0 b) 1 c) 671 d) 672 e) 2016 f) 2017

AL 41 Fie n un număr natural nenul. Să se calculeze suma

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}.$$

- a) $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ c) $1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
 d) $1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$ e) $1 - \frac{1}{n}$ f) $\frac{1}{n+1}$

AL 42 Într-un șir a_1, a_2, \dots , fiecare termen, începând cu al doilea, se obține mărinind cu 1 opusul termenului precedent. Dacă $a_1 = 2$, să se determine suma primilor 99 de termeni.

- a) 49 b) 50 c) 51 d) 99 e) 101 f) 98

AL 43 Fie a_1, \dots, a_n, \dots termenii unei progresii aritmetice de rație r . Știind că $a_{21} = 20$ și $a_{101} = 60$, să se determine r și formula termenului a_{n+1} .

- a) $r = \frac{1}{4}, a_{n+1} = n - 1$ b) $r = 1, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$
 c) $r = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{2}$ d) $r = -\frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{2}$
 e) $r = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 1 + \frac{n}{4}$ f) $r = 1, a_{n+1} = 10 + \frac{n}{6}$

AL 44 Un muncitor taie o scândură cu lungimea de 4 m în 10 bucăți, fiecare bucată fiind cu 10 cm mai scurtă decât precedenta. Ce lungime are cea mai scurtă bucată?

- a) 10 cm b) 11 cm c) 12 cm d) 13 cm e) 14 cm f) 15 cm

AL 45 O rachetă este lansată în plan vertical și parcurge în prima secundă 150 m . În fiecare din următoarele secunde parcurge cu 10 m mai puțin ca în secunda precedentă. Care este înălțimea maximă la care ajunge racheta? Cât durează până ajunge la înălțimea maximă?

- | | |
|---|---|
| a) $h_{max} = 1200 \text{ m}, t = 15 \text{ s}$ | b) $h_{max} = 1000 \text{ m}, t = 10 \text{ s}$ |
| c) $h_{max} = 1500 \text{ m}, t = 20 \text{ s}$ | d) $h_{max} = 2000 \text{ m}, t = 25 \text{ s}$ |
| e) $h_{max} = 800 \text{ m}, t = 7 \text{ s}$ | f) $h_{max} = 1800 \text{ m}, t = 22 \text{ s}$ |

AL 46 Fie S_m și S_n suma primilor m și respectiv n termeni ai unei progresii aritmetice ($m \neq n$) cu primul termen nenul. Știind că

$$\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2},$$

să se determine $\frac{a_m}{a_n}$.

- | | | |
|------------------------|------------------------|----------------------|
| a) $\frac{2m-1}{2n-1}$ | b) $\frac{2m+1}{2n+1}$ | c) $\frac{m}{n}$ |
| d) $\frac{m-1}{n-1}$ | e) $\frac{2m-3}{2n-3}$ | f) $\frac{m+1}{n+1}$ |

AL 47 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$, știind că numerele $9^x - 1$, 6^x , $4^x + 1$ sunt în progresie aritmetică în această ordine.

- | | | | | | |
|------------|------------|------------|------------|----------------|-------------|
| a) $\{1\}$ | b) $\{2\}$ | c) $\{5\}$ | d) $\{0\}$ | e) \emptyset | f) $\{-2\}$ |
|------------|------------|------------|------------|----------------|-------------|

AL 48 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ știind că numerele $9^x - 1$, 6^x , $4^x + 1$ sunt în progresie geometrică în această ordine.

- | | | | | | |
|-------------|------------|------------|------------|----------------|---------------------------------|
| a) $\{-2\}$ | b) $\{0\}$ | c) $\{1\}$ | d) $\{2\}$ | e) \emptyset | f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ |
|-------------|------------|------------|------------|----------------|---------------------------------|

AL 49 Fie n un număr natural mai mare decât 3. Să se calculeze suma

$$2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{22\dots 2}_{n\text{-ori}}.$$

a) $\frac{2}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$

b) $\frac{2}{81} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n - 1 \right)$

c) $\frac{1}{9} \left(\frac{20^{n+1} - 20}{9} - n \right)$

d) $2 \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$

e) $\frac{1}{9} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n \right)$

f) $\frac{2}{81} \left(\frac{10^{n+1} - 10}{9} - n + 1 \right)$

AL 50 O persoană trimite un e-mail la trei persoane și le cere să continue, după o săptămână, să trimită fiecare la alte trei persoane același e-mail. Câte e-mailuri circulă în total în primele 10 săptămâni dacă nu se întrerupe lanțul?

a) 88572

b) 59049

c) 29524

d) 88573

e) 9841

f) 31

AL 51 O minge cade de la 1,5 m înălțime, se lovește de pământ și sare din nou 1,35 m. Când cade din nou, urcă doar 1,215 m, și așa mai departe. Înălțimile formează o progresie geometrică. Care este înălțimea la care sare mingea a 6-a oară?

a) $1,5 \cdot (0,9)^5$

b) $0,9 \cdot (1,5)^5$

c) $1,5 \cdot (0,9)^6$

d) $15[1 - (0,9)^5]$

e) 0

f) $15[1 + (0,9)^5]$

AL 52 Populația de amoebe dintr-o colonie se dublează după fiecare două zile. Dacă acum șase zile erau 200 de amoebe, câte vor fi peste patru zile?

a) 1600

b) 3200

c) 6400

d) 12800

e) 800

f) 25600

AL 53 Populația unui tip de bacterie se triplează la fiecare 10 minute. Dacă acum 20 de minute populația numără 100 de bacterii, peste câte minute din acest moment populația va atinge 24300 de bacterii?

- a) 10 min b) 15 min c) 20 min
d) 25 min e) 30 min f) 35 min

AL 54 Fie $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, o progresie geometrică cu termeni nenuli și rație $q \neq 1$. Știind că $b_1 = 1$ și $2b_{n+1} - b_n - b_{n-1} = 0$ pentru orice $n \geq 2$, să se determine q și suma S_n a primilor n termeni ai progresiei.

- a) $q = \frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$ b) $q = -\frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$
c) $q = -\frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right)$ d) $q = \frac{1}{2}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$
e) $q = \frac{1}{4}, S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$ f) $q = \frac{1}{4}, S_n = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right)$

AL 55 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, de rație q și termeni strict pozitivi. Să se calculeze suma

$$\frac{b_1 + b_2}{b_2 + b_3} + \frac{b_2 + b_3}{b_3 + b_4} + \dots + \frac{b_{n-1} + b_n}{b_n + b_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

- a) $\frac{2n}{q}$ b) $\frac{n}{q}$ c) $\frac{n}{q+1}$ d) $\frac{n-1}{q+1}$ e) $\frac{n-1}{q}$ f) $\frac{n+2}{q}$

AL 56 Fie progresia geometrică $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$, de rație $q \neq \pm 1$ și termeni nenuli. Să se calculeze raportul $\frac{S}{P}$, unde

$$S = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{n+1}^2 \quad \text{și} \quad P = \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{b_2^2} + \dots + \frac{1}{b_{n+1}^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a) $b_1^4 q^{2n}$ b) $b_1^2 q^{2n}$ c) $b_1^{-4} q^{2n}$ d) $b_1^4 q^{4n}$ e) $b_1^2 q^{2n+2}$ f) $b_1^{-4} q^{2n+2}$

AL 57 O parabolă $y = ax^2 + bx + c$ are vârful în punctul de coordonate $(4, 2)$ și trece prin punctul $(2, 0)$. Să se calculeze produsul abc .

- a) -12 b) -6 c) 0 d) 1 e) 6 f) 12

AL 58 Să se determine funcția de gradul întâi, știind că graficul său taie axa Ox în $x = \sqrt{3}$ și trece prin punctul $B(2\sqrt{3}, 2)$.

- a) $\frac{2}{\sqrt{3}}x + 2$ b) $\frac{2}{\sqrt{3}}x - 2$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}x + 2$
d) $\frac{3}{\sqrt{3}}x + 1$ e) $\frac{2}{\sqrt{3}}x - 1$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}x$

AL 59 În câte puncte taie axa Ox graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{dacă } x < 0 \\ -2x - 3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} ?$$

- a) 2 b) 1 c) 0 d) 3 e) 5 f) 4

AL 60 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + 2m^2 + m + 1$, $m \in \mathbb{R}$, al cărei grafic este parabola (P) . Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului m pentru care parabola (P) are vârful situat în semiplanul $y \geq 0$.

- a) $[0, +\infty)$ b) $\{0, 1\}$ c) \mathbb{R} d) \emptyset e) $\{-1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 61 Să se determine funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, știind că graficul său trece prin punctul $A(0, 1)$ și este tangent axei Ox în punctul $B(1, 0)$.

- a) $2x^2 - 3x + 1$ b) $-2x^2 + x + 1$ c) $3x^2 - 4x + 1$
d) $x^2 - 2x + 1$ e) nu există f) $-4x^2 + 3x + 1$

AL 62 Într-un recipient, presiunea variază în intervalul $[0, 10]$ după legea $p(t) = \frac{5}{108}t^2 - \frac{5}{12}t + 7$ (presiunea măsurată în Bar, iar timpul în minute). După câte minute presiunea este minimă?

- a) 4,5 b) 6,0625 c) 0 d) 1 e) 9 f) 6,5

AL 63 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x + a}{x^2 + 1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a , știind că imaginea funcției f este un interval de lungime 1.

- a) $[0, +\infty)$ b) $(0, 1)$ c) $\{2\}$ d) \emptyset e) $\{1\}$ f) $(-\infty, 0]$

AL 64 Fie funcția $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. Să se determine valoarea minimă m și maximă M a funcției f .

- a) $m = 0, M = 1$ b) $m = -4, M = 5$ c) $m = -4, M = 4$
d) $m \in \emptyset, M = 5$ e) $m = -4, M = 1$ f) $m = -4, M = +\infty$

AL 65 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = -x^2 - (a - 2)x + 2a \quad \text{și} \quad g(x) = x^2 + (b + 1)x + b.$$

Să se determine parametrii reali a și b , știind că graficele funcțiilor f și g se intersectează în două puncte distincte situate pe axa Ox .

- a) $a = 0, b = -2$ b) $a = 1, b = -2$ c) nu există
d) $a = 0, b = 1$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = -1, b = -2$

AL 66 Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}.$$

Să se determine $f(-x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

a) $\frac{1}{f(x)}$ b) $-f(x)$ c) $f(x)$ d) $-f(-x)$ e) $-\frac{1}{f(x)}$ f) $\frac{1}{f(-x)}$

AL 67 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x-6, & x \in (-\infty, 2) \\ (m-1)x, & x \in [2, 4) \\ x+8, & x \in [4, \infty), \end{cases}$$

să fie strict monotonă pe \mathbb{R} .

a) $[1, 2)$ b) $[0, 3]$ c) $(1, 4]$ d) $[0, 2]$ e) $[0, 1]$ f) $[1, \infty)$

AL 68 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - x \text{ și } g(x) = 3x - 1.$$

Să se determine funcția compusă $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

a) $9x^2 - 9x + 2$ b) $3x(x^2 - x)$ c) $(3x - 1)^2 - x$
d) $x^2 + 2x - 1$ e) $3x^2 - 3x$ f) $x^2 - x$

AL 69 Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{dacă } x < 0 \\ 2x-3, & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases} \text{ și } g(x) = x-2.$$

Să se determine $(f \circ g)(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0 \\ 2x - 7, & x \geq 0 \end{cases} & \text{b) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 2 \\ 2x - 7, & x \geq 2 \end{cases} \\
\text{c) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 2 \\ 2x - 7, & x \geq 2 \end{cases} & \text{d) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ 2x - 7, & x \geq -2 \end{cases} \\
\text{e) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases} & \text{f) } (f \circ g)(x) = \begin{cases} x + 3, & x < 0 \\ 2x - 7, & x \geq 0 \end{cases}
\end{array}$$

AL 70 Să se determine toate funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = ax + 1 \text{ și } g(x) = x + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

știind că $f \circ g = g \circ f$.

- $$\begin{array}{ll}
\text{a) } f(x) = x + 1, g(x) = x & \text{b) } f(x) = ax + 1, g(x) = x \\
\text{c) } f(x) = x + 1, g(x) = x + b & \text{d) } f(x) = ax + 1, g(x) = x + 1 \\
\text{e) } f(x) = ax + 1, g(x) = x \text{ sau } f(x) = x + 1, g(x) = x + b & \\
\text{f) } f(x) = x + 1, g(x) = x \text{ și } f(x) = x + 1, g(x) = x - 1 &
\end{array}$$

AL 71 Dacă numerele reale x și y satisfac relația $|x + y| + |x - y| = 2$, să se determine valoarea maximă a expresiei $x^2 - 6x + y^2$.

- $$\begin{array}{llllll}
\text{a) } 4 & \text{b) } 5 & \text{c) } 6 & \text{d) } 7 & \text{e) } 8 & \text{f) } 9
\end{array}$$

AL 72 Câte perechi (x, y) de numere întregi satisfac inecuația

$$|x| + |y| < 10?$$

- $$\begin{array}{llllll}
\text{a) } 181 & \text{b) } 180 & \text{c) } 90 & \text{d) } 91 & \text{e) } 101 & \text{f) } 4 \cdot 181
\end{array}$$

AL 73 Fie $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots\}$ mulțimea soluțiilor sistemului

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 5. \end{cases}$$

Să se calculeze

$$\left| \sum_{(x,y) \in M} xy \right|.$$

- a) 6 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{5}$ e) 1 f) 2

AL 74 Să se determine valoarea parametrului nenul a pentru care sistemul de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a \\ x + y = 2a \end{cases}$$

are o singură soluție.

- a) -2 b) 2 c) 4 d) 3 e) -1 f) -6

AL 75 Să se găsească toate valorile reale ale lui x și y știind că $x + y = 2$ și $x^3 + y^3 = 2$.

- a) $x = y = 1$ b) $x = 2, y = 0$ c) $x = 1 + \sqrt[3]{2}, y = 1 - \sqrt[3]{2}$
d) $x = 0, y = 2$ e) $x = 4, y = -2$ f) $x = 3, y = -1$

AL 76 Fie mulțimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1, \sqrt[2017]{x + \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[2017]{x - \sqrt{x^2 - 1}} = 2 \right\}.$$

Să se determine $\sum_{x \in M} x^2$.

- a) 1 b) 4 c) 9 d) 13 e) 20 f) 2

AL 77 Să se determine valorile întregi pe care le poate lua numărul b astfel încât

$$\frac{2002}{10^{-b}}$$

să aparțină intervalului $[1, 100]$.

- | | | |
|---------------------|-----------------|-----------------|
| a) $\{0, 1\}$ | b) $\{-2, -1\}$ | c) $\{-3, -2\}$ |
| d) $\{-4, -3, -2\}$ | e) \emptyset | f) $\{-3, -1\}$ |

AL 78 Să se determine cea mai mică valoare întreagă a numărului k care face adevărată inegalitatea $0,02468 \cdot 10^k > 10000$.

- | | | | | | |
|------|-------|-------|------|-------|-------|
| a) 6 | b) 10 | c) 12 | d) 8 | e) 20 | f) 14 |
|------|-------|-------|------|-------|-------|

AL 79 Să se rezolve ecuația $2^{3^x} = 3^{2^x}$.

- | | | |
|--------------------|------------------------------|--|
| a) -1 | b) 0 | c) 1 |
| d) $\ln 3 - \ln 2$ | e) $\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)$ | f) $\frac{\ln(\ln 3) - \ln(\ln 2)}{\ln 3 - \ln 2}$ |

AL 80 Să se rezolve ecuația $6^x - 3^{-x} = \sqrt{2^x - 9^{-x}}$.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\left\{0, \frac{2 \ln 2}{\ln 2 + 2 \ln 3}\right\}$ | b) $\left\{0, \frac{\ln 3}{\ln 2 + \ln 3}\right\}$ | c) $\left\{1, \frac{\ln 2}{2 \ln 2 + \ln 3}\right\}$ |
| d) $\left\{1, \frac{\lg 3}{1 + \lg 2}\right\}$ | e) $\left\{0, \frac{\lg 2}{\lg 2 + 2 \lg 3}\right\}$ | f) $\left\{0, \frac{\lg 3}{1 + 2 \lg 2}\right\}$ |

AL 81 Fie $60^a = 3$, $60^b = 5$ și $c = \frac{1 - a - b}{2 - 2b}$. Să se determine 12^c .

- | | | | | | |
|---------------|------|---------------|------|----------------|------|
| a) $\sqrt{3}$ | b) 2 | c) $\sqrt{5}$ | d) 3 | e) $2\sqrt{3}$ | f) 4 |
|---------------|------|---------------|------|----------------|------|

AL 82 Să se găsească produsul tuturor soluțiilor reale ale ecuației $x^{\log_2 x} = 16$.

- a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16 f) 32

AL 83 Fie a și b numere reale strict pozitive care satisfac relațiile $a^b = b^a$ și $b = 9a$. Să se determine valoarea lui a .

- a) $1/9$ b) 3 c) $\sqrt[9]{9}$ d) $\sqrt[3]{9}$ e) 9 f) $\sqrt[4]{3}$

AL 84 Numerele reale strict pozitive x și y verifică relațiile

$$\log_4 x = \log_6 y = \log_9(x + y).$$

Să se determine raportul $\frac{y}{x}$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ c) $\log_2 3$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ f) $\log_3 2$

AL 85 Fie $x > 10$. Câte cifre are soluția ecuației $\lg(\lg(\lg x)) = 1$?

- a) 1 b) 10 c) 1000 d) 10^{10} e) $10^{10} + 1$ f) $10^{10^{10}}$

AL 86 Să se determine numărul soluțiilor ecuației $3^{x+1} + 100 = 7^{x-1}$.

- a) 1 b) 0 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 87 Fie $a > 0$, $a \neq 1$ și $n \geq 2$. Să se calculeze

$$\frac{1}{\log_2 a} + \frac{1}{\log_3 a} + \dots + \frac{1}{\log_n a}.$$

- a) $\log_a n!$ b) $\log_a n$ c) $\frac{1}{\log_{n^n} a}$
d) $\frac{1}{\log_a n^n}$ e) $\log_a n$ f) $\log_n a$

AL 88 Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația

$$\log_x (x^2 - x + 2) > 2 \log_x (x + 1).$$

- a) $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ b) $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ c) $x \in (1, \infty)$
 d) $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ e) $x \in (0, 1)$ f) $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

AL 89 Dacă $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $bc \neq 1$ și notăm $x = \log_b a$, $y = \log_c a$, atunci $\log_{bc} a$ este egal cu:

- a) $x + y$ b) xy c) $\frac{1}{x + y}$ d) $\frac{1}{xy}$ e) $\frac{x + y}{xy}$ f) $\frac{xy}{x + y}$

AL 90 Fie $a, b, c \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\begin{cases} a^x = bc \\ b^y = ca \\ c^z = ab. \end{cases}$$

Să se calculeze $xyz - x - y - z$.

- a) abc b) 2
 c) 0 d) $(a - b)(b - c)(c - a)$
 e) $a + b + c$ f) 1

AL 91 Câte numere naturale $n > 1$ au proprietatea că $\log_n 1024$ este număr întreg?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 92 În ce interval se află soluția strict pozitivă a ecuației

$$(x^2 + 9)^{\frac{1}{\log_x(x^2 + 9)}} = \sqrt[3]{-x^2 + 6x}.$$

- a) $(2, 3]$ b) $(0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right]$ c) $(1, 6)$
 d) $(-1, 0)$ e) $[-1, 1]$ f) $(1, 2)$

AL 93 Să se rezolve inecuația

$$\log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 2x + 2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2x + 3).$$

- a) $x \in [-1, +\infty)$ b) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup [-1, +\infty)$
 c) $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \cup \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ d) $x \in \emptyset$
 e) $x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ f) $x \in (-\infty, 0]$

AL 94 Se consideră expresia

$$E(x, n) = \sqrt[2]{x} \sqrt[2]{x} \sqrt[3]{x} \dots \sqrt[n]{x} - x^n,$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$ și $x > 0$. În care din următoarele situații $E(x, n)$ este strict pozitivă?

- a) $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ și $x \in (3, \infty)$ b) $n \geq 1$ și $x \in (2, 3]$
 c) $n \geq 1$ și $x \in (1, 2)$ d) $n = 1$ și $x = e$
 e) $n \geq 1$ și $x \in (0, 1)$ f) $n \geq 5$ și $x \in (3, \infty)$

AL 95 Să se determine mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R} \mid (2\sqrt{3} + 4)^x - 3(\sqrt{3} + 1)^x + 2 < 0\}.$$

- a) \emptyset b) \mathbb{R} c) $\left(0, \frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}\right)$
 d) $(0, +\infty)$ e) $(0, 1)$ f) $\left(\frac{\ln 2}{\ln(\sqrt{3} + 1)}, +\infty\right)$

AL 96 Fie numerele reale x_1, x_2, \dots, x_n astfel încât $x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, 1)$ sau $x_1, x_2, \dots, x_n \in (1, +\infty)$. Să se determine valoarea minimă a expresiei

$$E = \log_{x_1}(x_1 x_2 \dots x_n) + \log_{x_2}(x_1 x_2 \dots x_n) + \dots + \log_{x_n}(x_1 x_2 \dots x_n)$$

- a) 1 b) $n(n-1)$ c) n d) n^2 e) n^3 f) 0

AL 97 Fie e baza logaritmului natural și x_1, x_2 soluțiile ecuației

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x + e^3 \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x - e(e+1) = 0,$$

unde $x_1 > x_2$. Să se determine raportul $\frac{x_1}{x_2}$.

- a) $e(e+1)$ b) e c) 1 d) e^3 e) 2 f) nu există

AL 98 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & x < -1 \\ mx - 3, & x \geq -1. \end{cases}$$

Să se determine valoarea parametrului real m pentru care f este bijectivă și să se determine în acest caz funcția ei inversă.

$$\text{a) } m = 2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } m = -2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } m = 2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y \geq -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y < -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } m = -2, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{-y+3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{e) } m = -3, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} -2 - y, & y > -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{f) } m = -1, f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(y) = \begin{cases} 2 + y, & y > -1 \\ \frac{-y-3}{2}, & y \leq -1 \end{cases}$$

AL 99 Fie ecuația $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x+8} = 3$. Să se determine suma modulelor soluțiilor reale ale ecuației.

- a) 36 b) 0 c) 7 d) 28 e) 1 f) 3

AL 100 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $a \in \mathbb{R}$, știind că ecuația

$$\sqrt[3]{x^4 - 6x^2 + 9} - 3a\sqrt[3]{x^2 - 3} + 2a^2 = 0$$

are patru soluții reale distincte.

- a) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 2\sqrt[3]{3}\right)$ b) $[-\sqrt[3]{3}, +\infty)$ c) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, -\sqrt[3]{3}\right)$
d) $(1, 2]$ e) $\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$ f) $(0, 1]$

AL 101 Se consideră funcția $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ astfel încât

$$(f(1) + f(2) + f(3))^3 = 27f(1)f(2)f(3).$$

Să se determine numărul elementelor mulțimii $Im(f)$, unde $Im(f)$ reprezintă imaginea funcției f .

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) ∞

AL 102 Să se calculeze

$$\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5\sqrt{2}}.$$

- a) 1 b) -1 c) 2 d) -2 e) 5 f) -4

AL 103 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x astfel încât se poate calcula $C_{7x}^{x^2+10}$.

- a) $\{2, 3, 4, 5\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
d) \mathbb{N} e) \mathbb{R} f) \mathbb{Z}

AL 104 Să se calculeze suma

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 100 \cdot 100!.$$

- a) $(101!)^2$ b) $(100!)^2$ c) $101!$
d) $101! - 1$ e) $200! + 1$ f) $200! - 1$

AL 105 Să se calculeze suma $\sum_{i=1}^{100} \left(\sum_{j=1}^i j \right)$.

- a) 171700 b) $\frac{5050}{3}$ c) 17
d) 206040 e) 2550 f) $\frac{51}{2}$

AL 106 Să se calculeze

$$\sum_{i=1}^{100} \left(\left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i k! (k^2 + 1) \right).$$

- a) $100!$ b) $101! - 1$ c) $102!$
d) $102! - 2$ e) $100! - 2$ f) $101!$

AL 107 Să se determine puterea lui 2 din descompunerea în factori primi a numărului

$$31 \cdot 32 \cdot 33 \dots 59 \cdot 60.$$

- a) 30 b) 31 c) 29 d) $30!$ e) $29!$ f) 10

AL 108 Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine mulțimea $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} \mid \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}$.

- a) $\{3, 4\}$ b) $\{5, 6, 7\}$ c) $\{2, 3, 4\}$
d) \emptyset e) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ f) $\{2, 4, 6\}$

AL 109 Un păianjen trebuie să încalțe câte o șosetă și un pantof pe fiecare din cele 8 picioare ale sale. În câte ordini posibile poate el încălța cele 16 articole știind că, pe fiecare picior, el trebuie să ia șoseta înainte de a lua pantoful?

- a) $8!$ b) $2^8 \cdot 8!$ c) $(8!)^2$ d) $\frac{16!}{2^8}$ e) $16!$ f) $64!$

AL 110 Să se calculeze

$$\frac{C_{2017}^1 \cdot C_{2017}^3 \cdot \dots \cdot C_{2017}^{2017}}{C_{2017}^2 \cdot C_{2017}^4 \cdot \dots \cdot C_{2017}^{2016}}.$$

- a) 1 b) 2 c) 2017 d) $\frac{2017 \cdot 2016}{2}$ e) 2016 f) 2018

AL 111 Să se calculeze suma

$$C_9^3 + C_9^4 + C_9^5 + C_9^6 + C_9^7.$$

- a) 420 b) 446 c) 456 d) 492 e) 360 f) 968

AL 112 Fie

$$A = C_{100}^1 + 2C_{100}^2 + 3C_{100}^3 + \dots + 100C_{100}^{100}.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată?

- a) A este prim b) $A \in (10^5, 10^6)$ c) $3|A$
d) $7|A$ e) $A = 10000$ f) $100 \cdot 2^{99}$

AL 113 Câte numere de 10 cifre conțin 4 cifre de 3 și 6 cifre de 7?

- a) 24 b) 120 c) 210 d) 240 e) 256 f) 720

AL 114 Câte din submulțimile de trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, \dots, 15\}$ au suma elementelor divizibilă cu 3?

- a) 30 b) 90 c) 125 d) 155 e) 455 f) 910

AL 115 Care este cel mai mare factor prim de două cifre al numărului C_{200}^{100} ?

- a) 31 b) 47 c) 61 d) 67 e) 97 f) 24

AL 116 Să se determine suma numerelor de 5 cifre distincte formate cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5.

- a) $33333 \cdot 5!$ b) $33333 \cdot 5^5$ c) $33333 \cdot 5^4$
d) $33333 \cdot 6!$ e) $66666 \cdot 5!$ f) $66666 \cdot 5^5$

AL 117 Câte triplete (x, y, z) de numere naturale verifică ecuația

$$x + y + z = 10 ?$$

- a) 66 b) 60 c) 72 d) 120 e) 144 f) o infinitate

AL 118 Să se determine câte numere de 6 cifre au toate cifrele pare.

- a) $4 \cdot 5^5$ b) $4 \cdot 5^4$ c) 5^6 d) 5^5 e) $4 \cdot 5^6$ f) $(4 \cdot 5)^6$

AL 119 Într-o clasă sunt 15 elevi, dintre care 8 sunt fete și 7 băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 2 fete și 2 băieți pentru a participa la un concurs?

- a) 28 b) 588 c) $C_7^4 C_8^4$ d) 858 e) $A_{15}^7 A_{15}^8$ f) $C_7^2 + C_8^2$

AL 120 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului natural n care satisfac inegalitatea

$$2C_{n-1}^1 A_{n+1}^2 \geq (C_{n+1}^3)^2.$$

- a) $\{2, 3, 4\}$ b) $\{1, 2, 3, 4\}$ c) \emptyset
d) $\{2\}$ e) $[2, +\infty)$ f) $\{2, 3, 4, 5\}$

AL 121 Câți termeni raționali conține dezvoltarea $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[4]{3})^{99}$?

- a) 10 b) 8 c) 0 d) 44 e) 15 f) 9

AL 122 Fie $x > 0$. Câți termeni din dezvoltarea

$$\left(3\sqrt[4]{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$$

nu-l conțin pe x , știind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării este 1024?

- a) 4 b) 1 c) 0 d) 9 e) 3 f) 6

AL 123 Fie $x_1 = 9$ și $x_{n+1} = 9^{x_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine ultimele două cifre ale lui x_{2013} scris în baza 10.

- a) 11 b) 21 c) 89 d) 81 e) 99 f) 49

AL 124 Să se determine coeficientul lui x^4 din dezvoltarea $(1 + 5x + 4x^3)^{10}$.

- a) $40 \cdot C_{10}^2$ b) $200 \cdot C_{10}^2$ c) $5^4 \cdot C_{10}^4$
d) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^4 \cdot C_{10}^4$ e) $C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^4$ f) $40 \cdot C_{10}^2 + 5^2 \cdot C_{10}^3$

AL 125 Fie binomul

$$\left(2\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x\sqrt[4]{x}}\right)^n, \quad x > 0.$$

Știind că termenul T_{13} este de forma c_1x , să se determine termenul T_k din dezvoltarea binomului care este de forma c_2x^{-22} , unde c_1 și c_2 sunt două constante reale ce nu depind de x .

- a) T_{24} b) T_{26} c) T_{25} d) T_{23} e) T_{28} f) nu există

AL 126 Să se determine coeficientul termenului x^3y^3 din dezvoltarea expresiei $(x + 2y + 3)^8$.

- a) 5040 b) 560 c) 2016 d) 40320 e) 37 f) 65536

AL 127 Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui x pentru care al patrulea termen al dezvoltării $(5 + 2x)^{16}$ este cel mai mare.

- a) $\left(\frac{15}{28}, \frac{10}{13}\right)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 3)$
 d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ e) $(-2, 2)$ f) $(-1, 1)$

AL 128 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a astfel încât între soluțiile complexe z_1 și z_2 ale ecuației $z^2 + (2a - 1)z + 3a - 1 = 0$ să aibă loc relația

$$\left| \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \right| \leq 1.$$

- a) $\left[0, \frac{2}{5}\right]$ b) $(0, 1]$ c) $[-1, 1]$
 d) $(1, \infty)$ e) $(-\infty, 1)$ f) $(2, 3)$

AL 129 Să se determine suma modulelor soluțiilor ecuației

$$z^2 - (6 - i)z + 5 - i = 0.$$

- a) $2 + \sqrt{6}$ b) 1 c) $\sqrt{6}$ d) $2\sqrt{6}$ e) 2 f) $1 + \sqrt{26}$.

AL 130 Să se determine suma modulelor soluțiilor ecuației

$$z^6 - 9z^3 + 8 = 0.$$

- a) 3 b) 9 c) 2 d) 6 e) 8 f) 7

AL 131 Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \dots \cdot i^{2012}}{i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2013}}.$$

- a) 2013 b) $2013i$ c) i d) -1 e) $-i$ f) 1

AL 132 Se consideră numerele complexe z și w astfel încât

$$|z| = |w| = \sqrt{1006} \quad \text{și} \quad |z + w| = \sqrt{2013}.$$

Să se determine valoarea lui $|z - w|$.

- a) 1 b) $\sqrt{2012}$ c) 0 d) $\sqrt{1006}$ e) $\sqrt{2011}$ f) $\sqrt{2013}$

AL 133 Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C}, |z|^2 + z = 1 + i\}$ și $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine mulțimea $\{z^{4n}, z \in A\}$.

- a) $\{(-4)^{4n}\}$ b) $\{(-4)^n\}$ c) $\{1, (-4)^n\}$
d) \emptyset e) $\{(i-1)^n\}$ f) $\{(i(i-1))^n\}$

AL 134 Fie numerele complexe z_1, z_2, z_3 care satisfac relațiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \quad \text{și} \quad z_1 + z_2 + z_3 = 1.$$

Să se determine suma $z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

- a) 3 b) 1 c) $2n$ d) $(-1)^n$ e) n f) $n^2 - n + 1$

AL 135 Știind că $z^2 - z + 1 = 0$, să se determine $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)^9$.

- a) 2 b) -1 c) 0 d) $\cos \frac{2\pi}{3}$ e) 1 f) -2

AL 136 Numărul complex z satisface condițiile $|z - i| = |z - 1| = |z + 5|$. Să se determine $|z|$.

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $\sqrt{5}$ d) 3 e) $2\sqrt{2}$ f) 4

AL 137 Se știe că imaginea în plan a unui număr complex $z = x + iy$ este punctul $P(x, y)$. Imaginile în plan a patru numere complexe sunt vârfurile unui pătrat. Trei dintre numerele complexe sunt $-1 + 2i$, $-2 - 2i$ și $3 + i$. Care este cel de-al patrulea număr?

- a) $3 - 2i$ b) $-2 + 3i$ c) $2 - 3i$
 d) $-3 + 2i$ e) $2 - 2i$ f) $3 - 3i$

AL 138 Fie numărul complex z care verifică ecuația $z + |z| = 2 + 8i$. Să se determine $|z|^2$.

- a) 34 b) 68 c) 100 d) 169 e) 208 f) 289

AL 139 Numărul complex z are proprietățile $|z + 2| = |z - 6(1 + i)| = 5$. Să se determine $|z|$.

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\sqrt{13}$ e) $\sqrt{17}$ f) 5

AL 140 Expresia $\left(\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}\right)^{24}$ are valoarea

- a) -2^{24} b) 2^{24} c) 2^{12} d) -2^{12} e) 2^8 f) -2^8

AL 141 Se dau numerele complexe $z_1 = -1$ și $z_2 = -2 + i$. Să se determine numerele complexe z cu proprietățile

$$|z - z_1| = |z - z_2| = |z_1 - z_2|.$$

- a) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$
 c) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ d) $-\frac{3 \pm \sqrt{3}}{4} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{4}$
 e) $-\frac{3 \pm \sqrt{2}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2} + i\frac{1 \mp \sqrt{3}}{2}$

AL 142 Fie numerele complexe z și w . Să se calculeze

$$\frac{1 + |z \cdot w|^2}{|\bar{z} \cdot w + 1|^2 + |z \cdot \bar{w} - 1|^2} .$$

- a) 1 b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\bar{z}w + z\bar{w}$ e) $Re(zw)$ f) $Im(\bar{z}\bar{w})$

AL 143 Fie mulțimea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 + z + 1 = 0\}$. Știind că $z \in A$, să se calculeze

$$\frac{z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + z^7 + z^6 + z^3 - 4}{z^{2013} + 2} .$$

- a) z b) z^2 c) $-\frac{4}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) -1 f) 0

AL 144 Să se determine suma soluțiilor ecuației

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 + \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \frac{z-i}{z+i} + 1 = 0 .$$

- a) i b) 1 c) $-i$ d) -1 e) 0 f) $2i$

AL 145 Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 care îndeplinesc condițiile

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1, \quad z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \quad \text{și} \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0.$$

Să se determine $|z_1 + z_2 + z_3|$.

- a) 1 b) 0 c) 4 d) 8 e) 2 f) 6

AL 146 Care este probabilitatea p , respectiv q , ca alegând una din soluțiile ecuației $(x+2)(x^2-x-1)=0$ aceasta să fie reală, respectiv întreagă.

- a) $p = \frac{1}{3}, q = 0$ b) $p = 1, q = \frac{1}{3}$ c) $p = q = \frac{1}{3}$
d) $p = 1, q = 0$ e) $p = \frac{1}{3}, q = \frac{2}{3}$ f) $p = q = \frac{1}{2}$

AL 147 Care este probabilitatea p , respectiv q , ca să extragem un număr impar, respectiv un cub perfect (adică de forma $n^3, n \in \mathbb{N}^*$), dintre numerele de la 1 la 101.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } p = \frac{50}{101}, q = \frac{4}{101} & \text{b) } p = \frac{51}{101}, q = \frac{4}{101} & \text{c) } p = \frac{50}{101}, q = \frac{5}{101} \\ \text{d) } p = \frac{51}{101}, q = \frac{5}{101} & \text{e) } p = \frac{50}{101}, q = \frac{3}{101} & \text{f) } p = \frac{49}{100}, q = \frac{3}{101} \end{array}$$

AL 148 Din mulțimea $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ se aleg aleator șase numere. Care este probabilitatea ca al doilea cel mai mare număr ales să fi fost 8?

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \frac{1}{2} & \text{b) } \frac{1}{3} & \text{c) } \frac{1}{4} & \text{d) } \frac{1}{6} & \text{e) } \frac{1}{8} & \text{f) } \frac{1}{10} \end{array}$$

AL 149 Considerăm un alfabet format din simbolurile $\diamond, \heartsuit, *$ și \sharp . Câte cuvinte de lungime patru se pot forma în acest alfabet astfel încât fiecare simbol să apară o singură dată?

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } 24 & \text{b) } 256 & \text{c) } 16 & \text{d) } 1 & \text{e) } 64 & \text{f) } 32 \end{array}$$

AL 150 Amestecăm un pachet de 52 de cărți de joc și extragem simultan două cărți la întâmplare. Care este probabilitatea să alegem doi ași de aceeași culoare?

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \frac{1}{52} & \text{b) } \frac{1}{51 \cdot 52} & \text{c) } \frac{1}{51 \cdot 26} & \text{d) } \frac{A_4^2}{52} & \text{e) } \frac{C_4^2}{52} & \text{f) } \frac{1}{51 \cdot 13} \end{array}$$

AL 151 Câte secvențe binare (0 sau 1) de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00?

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } 1 & \text{b) } 160 & \text{c) } 32 & \text{d) } 192 & \text{e) } 128 & \text{f) } 162 \end{array}$$

AL 152 Simona Halep și Serena Williams joacă finala Turneului Wimbledon după regula cel mai bun din 3 seturi. Se presupune că cele două jucătoare au șanse egale de a câștiga un set și că rezultatul unui set este independent de alte rezultate. Dacă Simona Halep a câștigat deja primul set, care este probabilitatea ca ea să câștige finala?

- a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{6}$ e) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{3}{4}$

AL 153 Care este probabilitatea ca aruncând trei zaruri să obținem suma punctelor 6?

- a) $\frac{5}{108}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{108}$ e) $\frac{1}{72}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 154 Care este probabilitatea ca aruncând de două ori succesiv două zaruri, să obținem în ambele cazuri suma punctelor 7?

- a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{36}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{1}{49}$ e) $\frac{6}{7}$ f) $\frac{6}{49}$

AL 155 O șesime din cantitatea de pizza vândută de un restaurant este cu brânză, iar o cincime din restul celor vândute este cu pepperoni. Andrei cumpără la întâmplare o pizza. Care este probabilitatea ca aceasta să fie cu pepperoni?

- a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{1}{30}$ f) $\frac{3}{5}$

AL 156 Andrei invită 12 prieteni la cină, din care jumătate sunt bărbați. Dintre prieteni, exact o femeie și un bărbat aduc câte un desert. Selectăm la întâmplare o persoană dintre invitați. Care este probabilitatea ca aceasta să fie un bărbat care nu a adus desert sau să fie o femeie?

- a) $\frac{1}{36}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{1}{6}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{35}{36}$ f) $\frac{1}{12}$

AL 157 Într-un magazin se găsesc la vânzare 10 calculatoare Asus, 5 Toshiba și 5 Sony. Delegatul Companiei-client, nefiind specialist IT, achiziționează la întâmplare 3 calculatoare. Care e probabilitatea ca acesta să fi ales 2 calculatoare Asus și unul Sony?

- a) $\frac{15}{76}$ b) $\frac{3}{20}$ c) $\frac{5}{38}$ d) $\frac{5}{114}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{33}{38}$

AL 158 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $A \cdot B - C$.

- a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

AL 159 Se consideră matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} y & 1 \\ 2y & y \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad C = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 2x + 4y & 2y \end{pmatrix}.$$

Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $xA + yB = C$.

- a) $x = 1, y = 2$ b) $x = 2, y = 1$ c) $x = -2, y = -2$
d) $x = 2, y = -1$ e) $x = 1, y = -2$ f) $x = 2, y = 2$

AL 160 Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\sum_{k=1}^n \left[\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln k & k \\ 1 & \ln k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 10 - \ln 10! & -35 \\ 10 & 10 - \ln 10! \end{pmatrix}.$$

- a) 10 b) e c) nu există
d) 1 e) 2 f) 5

AL 161 Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_2$. Să se determine matricele $B \cdot A \cdot C$ și $f(B)$.

- a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}, 2B$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$
e) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2B$ f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}, -2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

AL 162 Fie $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y, z \in \mathbb{R}$. Să se determine x^{yz} , dacă matricile

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

verifică relația

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

- a) 4 b) x c) 8 d) 2 e) e f) 1

AL 163 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 & 1 \\ 0 & -1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Să se determine $a + b$ astfel încât

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 31 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}.$$

- a) -2 b) 8 c) 2 d) 3 e) 5 f) -1

AL 164 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$\text{tr}[(I_2 + A)(I_2 + 2A)(I_2 + 3A) \dots (I_2 + 2018A)],$$

unde $\text{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a unei matrice pătratică X .

- a) 0 b) $2018!$ c) $1 + 2017!$
d) $2019!$ e) $1 + 2018!$ f) $1 + 2019!$

AL 165 Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

astfel încât $AB \neq O_2$ și $BA = O_2$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua suma elementelor matricei B .

- a) $\{2k : k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}\}$ b) \mathbb{N} c) \mathbb{Z}
d) $\mathbb{Z} \setminus \{1\}$ e) $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$ f) $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$

AL 166 Dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $X = (x_{ij})_{i,j=1,2}$, este o matrice care comută prin înmulțire cu orice matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, atunci:

- a) $x_{11} = x_{22}$, $x_{12} = x_{21} = 0$ b) $x_{11} = -x_{22}$, $x_{12} + x_{21} = 1$
 c) $x_{11} = x_{12} = 0$, $x_{22} = x_{21} \in \mathbb{Z}^*$ d) $x_{11} = x_{12} = x_{21} = x_{22} \in \mathbb{Z}^*$
 e) $x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = -1$ f) $x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} = 1$

AL 167 Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

AL 168 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2 \\ 1009 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze

$$A + A^2 + A^3 + \dots + A^{2018}.$$

- a) $\frac{2019^{2018} + 1}{2018} A$ b) $\frac{2018^{2016} + 1}{2017} A$ c) $\frac{2019^{2018} - 1}{2018} A$
 d) $2018A$ e) $1009 \cdot 2019 A$ f) $\frac{2018^{2016} - 1}{2017} A$

AL 169 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Să se determine cel mai mic număr natural $n \geq 2$ pentru care există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $A^n = kA$.

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 7

AL 170 Fie matricea

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze $X^{4n+1} + 2^{2n}X$ pentru $n \in \mathbb{N}$ impar.

- a) X b) I_2 c) O_2 d) $-X$ e) $-I_2$ f) X^2

AL 171 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i = j, \\ 0, & i > j, \\ (-1)^{i+j} C_j^i, & i < j. \end{cases}$$

Să se calculeze A^n , $n \in \mathbb{N}^*$, exprimând rezultatul în funcție de matricea identitate I_3 și de puterile matricei $B = A - I_3$.

- a) $A^n = nB^n + 2I_3$ b) $A^n = \left(\frac{n^2-n}{2} + 1\right) B + nI_3$
c) $A^n = \frac{n^2-n}{2} B^2 + nB + I_3$ d) $A^n = \frac{n^2-n}{2} B + nI_3$
e) $A^n = nB^2 + \frac{n^2-n}{2} B + I_3$ f) $A^n = \frac{n^2-n-1}{2} B^2 + nB + I_3$

AL 172 Fie matricea

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 1-x \end{pmatrix}, \quad x \neq \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $(A(-2017))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{a) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4035^n & 0 & -4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ -4035^n & 0 & 4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 + 4035^n & 0 & 1 - 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - 4035^n & 0 & 1 + 4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 4035^n & 0 & 1 - 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 - 4035^n & 0 & 1 + 4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2017^n & 0 & 4035^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 4035^n & 0 & -2017^n \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} -4035^n & 0 & 2017^n \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^n & 0 & -4035^n \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - 4035^n & 0 & 2017^{2n} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2017^{2n} & 0 & 1 - 4035^n \end{pmatrix}$$

AL 173 Să se determine numerele reale a și b pentru care soluția ecuației

$$X^{2017} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

este de forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

$$\text{a) } a = 0, b = 0$$

$$\text{b) } a = 2017, b = \frac{1}{2017}$$

$$\text{c) } a = \frac{1}{2017}, b = 2017$$

$$\text{d) } a = 0, b = \frac{1}{2017}$$

$$\text{e) } a = 2017, b = 0$$

$$\text{f) } a = \frac{1}{2017}, b = \frac{1}{2017}$$

AL 174 Fie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ o matrice nenulă cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,

$$ad = bc \text{ și } a + d \neq 0.$$

Să se determine suma elementelor matricei

$$\begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(b+c) + 1$ b) $(a+b+c+d)^n + 2$
 c) $\frac{(1+a+d)^{n-1}}{a+d}(a+b+c+d)$ d) $\frac{(1+a+d)^n - 1}{a+d}(a+b+c+d) + 2$
 e) $(a+b+c+d+2)^n$ f) $(1+a+d)^n(b+c) + 1$

AL 175 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^{36} .

- a) I_2 b) O_2 c) A d) $\sqrt{3}A$ e) $2^{36}I_2$ f) $3^{36}I_2$

AL 176 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & e^x & e^{-x} \\ e^{-x} & 0 & 0 \\ e^x & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze A^{2017} .

- a) $2^{2017}A$ b) I_3 c) $-I_3$ d) $2^{1008}A$ e) $2^{2017}I_3$ f) $2^{1008}I_3$

AL 177 Se consideră mulțimea matricelor de forma

$$X(m) = \begin{pmatrix} 1+4m & 6m \\ -2m & 1-3m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Să se studieze dacă $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ și să se calculeze $(X(1))^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{ll}
\text{a) Nu, } \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 6(2^n - 1) \\ 2 + 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} & \text{b) Da, } \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 3 \cdot 2^{n+1} - 6 \\ 2 - 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
\text{c) Da, } \begin{pmatrix} 2^{n+2} - 3 & 3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2(1 - 2^n) & 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix} & \text{d) Da, } \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 6(2^n + 1) \\ 2 - 2^{n+1} & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \\
\text{e) Da, } \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 6(2^n - 1) \\ 2(1 - 2^n) & 4(1 - 3 \cdot 2^{n-2}) \end{pmatrix} & \text{f) Nu, } \begin{pmatrix} 2^{n+2} + 3 & 3 \cdot 2^{n+1} + 6 \\ 2(1 - 2^n) & 4 + 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}
\end{array}$$

AL 178 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

și $X = A \cdot B \cdot C$. Să se determine suma elementelor matricei X^n , unde n este un număr natural nenul.

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } 2^{n+1} & \text{b) } 5^n - 2^{n-1} & \text{c) } \frac{5^{n+1}}{3} \\
\text{d) } \frac{2^n}{3} & \text{e) } 5^n - 1 & \text{f) } \frac{4^n + 5^n}{3} + 1
\end{array}$$

AL 179 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2018 & 2019 \\ 2019 & 2020 \end{pmatrix}.$$

Atunci A^{2018} este de forma:

$$\begin{array}{l}
\text{a) } \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+1 & a+2 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{N} \\
\text{b) } \begin{pmatrix} a & 2019x \\ 2019x & a+2x \end{pmatrix}, a, x \in \mathbb{N} \text{ cu } a^2 + 2ax - 2019^2x^2 = 1 \\
\text{c) } \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a-2x \end{pmatrix}, a, x \in \mathbb{N}^* \\
\text{d) } \begin{pmatrix} a+2 & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{N}
\end{array}$$

- e) $\begin{pmatrix} 2018a & 2019b \\ 2019b & 2018a + 2 \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{N}$
- f) $\begin{pmatrix} 2018a & 2019b \\ 2019b & 2020(a + 2) \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{N}$

AL 180 Fie $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = aX^2 + bX + cI_3$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dacă matricele A și $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică proprietățile

$$f(AB) = O_3 \quad \text{și} \quad f(BA) \neq O_3,$$

atunci să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

- | | | |
|------------|-------------|------------|
| a) $a = 0$ | b) $b = 0$ | c) $c = 0$ |
| d) $a = 1$ | e) $b = -1$ | f) $c = 1$ |

AL 181 Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A^{2018} = O_3$. Câte matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ verifică proprietatea $A^{2017}B + BA = I_3$?

- | | | |
|------|---------|-----------------|
| a) 0 | b) 2018 | c) 27 |
| d) 1 | e) 2 | f) o infinitate |

AL 182 Să se determine suma tuturor elementelor fiecărei matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ care verifică relația

$$X^2 - 4X = \begin{pmatrix} -3 & 2018 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

- | | | |
|----------|-------------------|--------------------|
| a) -2015 | b) -2013 | c) -2015 sau 2023 |
| d) 2018 | e) -2017 sau 2023 | f) -2017 sau -2013 |

AL 183 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2019 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se găsească $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2019} + X = A$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{2018}{2019} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1010 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{2020} \begin{pmatrix} 2020 & 2019 \\ 0 & 2020 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

f) $A - \begin{pmatrix} \sqrt[2019]{2} & \sqrt[2019]{2019} \\ 0 & \sqrt[2019]{2} \end{pmatrix}$

AL 184 Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \dots + A^n(a)$ și să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{1}{n} B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, a \text{ impar}$

b) $\begin{pmatrix} n & 5a \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}, a \text{ impar}$

c) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 & 5a(n+1) \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, a \text{ par}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 5a \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \text{ par}$

e) $\frac{n}{2} \begin{pmatrix} 1 & 5a(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \text{ impar}$

f) $\begin{pmatrix} n & 5a \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}, a \text{ par}$

AL 185 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

f) 6

AL 186 Să se determine rangul matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 187 * Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \sqrt{2} & m \\ m & \sqrt{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

să aibă rangul minim.

- a) $\pm \frac{2}{3}$ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\sqrt{2}$ f) $-\frac{2}{3}$

AL 188 Pentru câte valori ale parametrului real m , matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & m & -1 \\ -2 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

are rangul maxim?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate e) 6 f) 10

AL 189 Fie matricele $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, $3 \geq m \geq n \geq 2$. Dacă

$$4(AB)^3 + 3(AB)^2 + 2(AB) + I_m = O_m,$$

atunci să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

- a) $m = n + 1$ b) $BA = I_n$ c) $(AB)^3 = I_m$
d) $m = n$ e) $(AB)^4 = I_m$ f) $\det(AB) = 0$

AL 190 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & a_1 - b_3 \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & a_2 - b_3 \\ a_3 - b_1 & a_3 - b_2 & a_3 - b_3 \end{vmatrix},$$

unde $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 3}$.

- | | |
|---|-------|
| a) $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$ | b) 1 |
| c) $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$ | d) 0 |
| e) $-a_1 + b_1 - a_2 + b_2 - a_3 + b_3$ | f) -1 |

AL 191 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,3}}$, unde $a_{ij} = 1 + \log_{i+1} j$. Să se calculeze $(\text{tr}(A))^{\det A}$, unde $\text{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A .

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) $\log_3 2 + \log_2 3 + 3$ | b) 1 |
| c) 3 | d) $\frac{1}{2} \log_2 3$ |
| e) $\frac{3}{2} \log_3 2 + 3$ | f) $\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_2 3 + 3$ |

AL 192 Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ și $B = \sum_{k=1}^n A^k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze determinantul matricei B .

- | | | |
|-----------------------------|----------|--------------------|
| a) $(2^{n+1} - 1)(3^n - 1)$ | b) 1 | c) 0 |
| d) $3(2^n - 1)(3^n - 1)$ | e) 6^n | f) $\frac{1}{6^n}$ |

AL 193 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- | | |
|-------------------|------------------------|
| a) $a + b + c$ | b) $a^2 + b^2 + c^2$ |
| c) $ab + bc + ca$ | d) $(a+b)(a+c)(b+c)$ |
| e) $-a - b - c$ | f) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$ |

AL 194 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietățile:

$$\det(A - I_2) = 2 \quad \text{și} \quad \det(A + I_2) = 4.$$

Să se calculeze $\det A + \det(A - 2I_2)$.

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

AL 195 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a - b - c & 2a & 2a \\ 2b & b - c - a & 2b \\ 2c & 2c & c - a - b \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

- a) 0 b) b c) c
d) a e) $a + b + c$ f) $(a + b + c)^3$

AL 196 Să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \overline{abc} & \overline{bca} & \overline{cab} \\ \overline{cab} & \overline{abc} & \overline{bca} \\ \overline{bca} & \overline{cab} & \overline{abc} \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c = \overline{1, 9}$.

- a) 99800 $(a - b)(b - c)(c - a)$ b) 998001 $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$
c) $10^6 abc$ d) 9908 $(a + b + c)^3$
e) 0 f) 999 \overline{abc}

AL 197 Fie x, y și z numere reale, pozitive și distincte. Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x & y & y \\ z & x & y \\ z & z & x \end{vmatrix}.$$

$$\text{a)} \frac{z(x-y)^3 - y(x-z)^3}{z-y}$$

$$\text{b)} \frac{z(x-y)^4 - y(x-z)^4}{z-y}$$

$$\text{c)} \frac{z(x-y)^2 - y(x-z)^2}{z-y}$$

$$\text{d)} \frac{z(x+y)^4 - y(x+z)^4}{z+y}$$

$$\text{e)} \frac{z(x+y)^3 - y(x+z)^3}{z+y}$$

$$\text{f)} \frac{z(x+y)^2 - y(x+z)^2}{z+y}$$

AL 198 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

$$\text{a)} (a+b+c)^2$$

$$\text{b)} 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\text{c)} 0$$

$$\text{d)} 2(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\text{e)} a^2 + b^2 + c^2 - 2abc$$

$$\text{f)} 4(a+b+c)^2 + abc$$

AL 199 Să se calculeze

$$\begin{vmatrix} a^2 - ab - ac + p & ab - a^2 - ac - p & ac - a^2 - ab - p \\ ab - b^2 - bc - p & b^2 - ab - bc + p & bc - ab - b^2 - p \\ ac - bc - c^2 - p & bc - ac - c^2 - p & c^2 - ac - bc + p \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c, p \in \mathbb{R}$.

$$\text{a)} 0$$

$$\text{b)} a^2 + b^2 + c^2 + p^2$$

$$\text{c)} p(a^2 + b^2 + c^2 + p^2)$$

$$\text{d)} -4p^2(a^2 + b^2 + c^2 + p)$$

$$\text{e)} -2p(ab + ac + bc)$$

$$\text{f)} 4p^2(a^2 + b^2 + c^2 + p^2)$$

AL 200 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ale cărei elemente satisfac condiția $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0$ pentru orice $i, j, k = \overline{1, 3}$. Să se determine valoarea determinantului matricei A .

$$\text{a)} 2017$$

$$\text{b)} -2017$$

$$\text{c)} 1$$

$$\text{d)} -1$$

$$\text{e)} 0$$

$$\text{f)} 1009$$

AL 201 Fie a, b, c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a > b > c$, $m(\widehat{C}) = 15^\circ$ și

$$\begin{vmatrix} c^2 + ac - a - 1 & ac - a & a^2 - b^2 - c \\ b^2 + ab - a - 1 & a^2 - c^2 - b & ab - a \\ b^2c + bc + bc^2 & a^2b - b^3 & a^2c - c^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

- a) $1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ c) 1
d) $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{4}$

AL 202 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^3} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b^3} & -\frac{1}{b^2} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c^3} & -\frac{1}{c^2} & \frac{1}{c} \end{vmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

- a) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$
b) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$
c) $\frac{1}{abc} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right)$
d) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$
e) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$
f) $\frac{1}{a^2b^2c^2} \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} \right) \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right)$

AL 203 Fie determinantul

$$\Delta_n^i = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{i-1} & a_2^{i-1} & \dots & a_n^{i-1} \\ a_1^{i+1} & a_2^{i+1} & \dots & a_n^{i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}, \text{ unde } 1 \leq i \leq n-1, \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2, \ a_i \in \mathbb{R}^*.$$

Să se calculeze $\Delta_3^1 + \Delta_3^2$.

- a) $(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- b) $(a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- c) $(a_1 + a_2 + a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- d) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- e) $(1 + a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_2a_3)(a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1)$
- f) $a_1 - a_2 + a_3$

AL 204 Fie $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ soluțiile ecuației $\det(A - xI_3) = 0$, unde

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $|x_1| + |x_2| + |x_3|$.

- a) 0 b) 1 c) 3 d) 7 e) -3 f) 4

AL 205 Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $AB = BA$, $C = A^2 + B^2$ și x_1, x_2 soluțiile ecuației

$$x^2 - 2x \det C - \det C = 0.$$

Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

- a) $x_1, x_2 \geq 0$ b) $x_1, x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
 c) $x_1 < 0, x_2 = \sqrt{2} x_1$ d) $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$ sau $x_1 \leq 0, x_2 \geq 0$
 e) $x_1 = x_2 > 0$ f) $x_1 = \sqrt{2} x_2, x_2 > 0$

AL 206 Să se determine suma numerelor reale x, y, z pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & x & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & y & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & z & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

satisface relațiile $AA^t = A^tA = I_3$ și are determinantul egal cu 1.

- a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$ f) 0

AL 207 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det A = \operatorname{tr}(A) = 1$, unde $\operatorname{tr}(A)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui A . Câte elemente are mulțimea $\{I_2, A, A^2, \dots, A^{2018}\}$?

- a) 5 b) 2 c) 7 d) 3 e) 6 f) 4

AL 208 Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $AB \neq BA$ și $A^3 = B^3$. Să se determine valoarea expresiei

$$\det(AB) - \operatorname{tr}(A + B),$$

unde $\operatorname{tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a lui X .

- a) 2 b) 0 c) -1 d) -2 e) 1 f) 3

AL 209 Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $A + A^t = O_3$ și x un număr real astfel încât $\det(A^2 - xI_3) < 0$. Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

- | | | |
|----------------------|-------------|-------------|
| a) $x \in \emptyset$ | b) $x = -1$ | c) $x > 0$ |
| d) $x = 0$ | e) $x = -2$ | f) $x = -3$ |

AL 210 Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cel puțin una nesingulară astfel încât

$$3AB = 2BA + I_3.$$

Să se calculeze

$$\det(I_3 - AB) + 2\det(I_3 - BA) - 3\det(AB - BA).$$

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|--------------------|
| a) $1 - \det(AB - BA)$ | b) -1 | c) $\frac{3}{2}$ |
| d) $3 + \det(I_3 - AB)$ | e) $2 + \det(I_3 - BA)$ | f) $\det(AB - BA)$ |

AL 211 Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix},$$

să aibă soluție nesingulară.

- | | | |
|------------------------|---------------------|-----------------------|
| a) $m \notin \{0, 1\}$ | b) $m \in \{0, 1\}$ | c) $m \in \mathbb{R}$ |
| d) $m \in \emptyset$ | e) $m = 0$ | f) $m = 1$ |

AL 212 Fie ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- a) 12 b) 5 c) -9 d) -4 e) 7 f) 3

AL 213 Să se determine mulțimea tuturor soluțiilor ecuației matriceale

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} -m & -m \\ m & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$
 c) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
 e) $\left\{ \begin{pmatrix} 3m & m \\ m & 3m \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$ f) $\left\{ \begin{pmatrix} m & m \\ -m+2 & -m+2 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R} \right\}$

AL 214 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât să aibe loc relația

$$A^{-1} = aA^2 + bA + cI_3.$$

- a) $2a + b = \det A$ b) $a = 1, b = 2, c = 0$
 c) $a = 0, b = 2, c = -1$ d) $a = -1, b = 2, c = 0$
 e) nu există $a, b, c \in \mathbb{R}$ f) $a = 1, b = -2, c = 0$

AL 215 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ ale cărei elemente sunt

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j \text{ sau } i = j = 1, \\ i^2 + i + 1, & i = j \text{ și } i \neq 1. \end{cases}$$

Să se determine suma elementelor inversei matricei A .

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 216 Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$$

să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3}, 1 \right\}$ b) $\left(\frac{2}{3}, 1 \right)$ c) $\left(-\infty, \frac{2}{3} \right) \cup (1, +\infty)$
d) $\left(\frac{1}{3}, 2 \right)$ e) $\left(-\infty, \frac{1}{3} \right] \cup [2, +\infty)$ f) $\left[\frac{2}{3}, 1 \right]$

AL 217 Fie matricele $A, B, C, D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, B, C, D nesusingulare, astfel încât

$$(A - B^{-1})B - (AD + CB) + CD = O_2.$$

Care din următoarele relații este adevărată?

- a) $I_2 - CD + BA = CB + DA$ b) $D(C + D^{-1}) - AB = DA + BC$
c) $DC - I_2 + BA = BC + DA$ d) $C(D - C^{-1}) + AB = BC - AD$
e) $CD + I_2 - DA = BC - BA$ f) $C(C^{-1} + D) + AB = BC + AD$

AL 218 Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ac & bc - 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}_+^*)$ astfel încât

$$\det(A - aA^{-1}) = \det(A - A^{-1}) = 4.$$

Să se determine abc .

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 6 e) 12 f) -18

AL 219 Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât $A^2 \neq O_2$ și

$$A^4 - (a+d)^2 A^2 + (ad-bc)^2 I_2 = O_2.$$

Să se studieze existența inversei lui A și în cazul în care aceasta există să se determine A^{-1} .

a) $\frac{a+d}{ad-bc} I_2$

b) nu există

c) $\begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{a+d} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$

e) A

f) $\frac{1}{bc-ad} \begin{pmatrix} -a & c \\ b & -d \end{pmatrix}$

AL 220 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4 \end{cases}.$$

a) $(-24, 14, 19)$

b) $(-2, -3, 3)$

c) $(21, 10, -14)$

d) $(-5, -3, 6)$

e) $(-14, -21, 24)$

f) $(3, -2, -3)$

AL 221 Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 2 \\ x + 4y + 3z = 1 \\ -3x - 2y + z = -3 \end{cases}.$$

Care din următoarele relații este verificată de soluțiile sistemului?

a) $x^2 - y^2 - 2z = 1$

b) $x + y + z = 3$

c) $x^2 + y - z^2 = -1$

d) $x + y^2 - z^2 = 1$

e) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

f) $x^2 + y + z^2 = 4z$.

AL 222 Soluția sistemului $(A - 9I_3)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, este $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată pentru orice valori posibile ale lui x_1, x_2 și x_3 .

- a) $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ b) $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$ c) $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
d) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ e) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ f) $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

AL 223 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ y + az = a \\ x + z = 1, \quad a \in \mathbb{R}^* . \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care soluția sistemului este formată din trei numere în progresie geometrică.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) \mathbb{R}^* d) \mathbb{R}_+^* e) \mathbb{Q}^* f) $\{-1\}$

AL 224 Se dă sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + (m - 1)z = -2 \\ x + 2y + z = 2 \\ mx + y + 3z = 1 . \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat.

- a) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\{-2, 2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{-2\}$ e) $\left\{-2, \frac{5}{2}\right\}$ f) $\{1\}$

AL 225 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 + a \\ -x + y - z = a \\ 2x + y = 1, \quad a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui a pentru care soluția sistemului verifică relația $3x + 3y - z = 0$.

- a) $\{0\}$ b) \mathbb{R} c) $\{1\}$ d) $\{-1\}$ e) $\{2\}$ f) $\{-2\}$

AL 226 Se consideră sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz + 4t = p \\ 2x + 3y + z + 6t = 1 \\ -x - 2y + 3z + nt = 2, \quad m, n, p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine $(m+n)^p$ astfel încât sistemul să fie compatibil și rangul matricei sistemului să fie egal cu 2.

- a) 6^3 b) 1 c) -8 d) 4^6 e) -1 f) 8

AL 227 Să se determine acele soluții (x, y, z) ale sistemului

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

pentru care $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

- | | |
|--|---|
| a) $(0, 1, 0), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{10}{13}\right)$ | b) $(1, 0, 0), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$ |
| c) $\left(\frac{12}{13}, \frac{7}{13}, -\frac{3}{13}\right), (0, 0, -1)$ | d) $(0, 0, 1), \left(\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right)$ |
| e) $(0, 0, 1), \left(-\frac{12}{13}, \frac{4}{13}, \frac{3}{13}\right)$ | f) $\left(\frac{11}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{3}{13}\right), (0, 0, 1)$ |

AL 228 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5, \quad m \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

a) $-\frac{1}{10}$

b) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$

d) $\frac{1}{10}$

e) $-\frac{1}{20}$

f) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{20} \right\}$

AL 229 Fie sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 9y + z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

și (x_0, y_0, z_0) o soluție nebanală a sistemului. Să se determine valoarea raportului

$$\frac{5x_0 - 10y_0 - z_0}{10x_0 + 5y_0 + 3z_0}.$$

a) $\frac{23}{5}$

b) 1

c) $\frac{7}{5}$

d) 2

e) -1

f) $-\frac{7}{5}$

AL 230 Fie sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} (a-2)x + ay + (a+1)z = 0 \\ (b-2)x + by + (b+1)z = 0 \\ (c-2)x + cy + (c+1)z = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Să se determine a, b, c astfel încât sistemul să aibă o singură soluție.

a) $a = b = c$

b) $a, b, c \in \mathbb{R}$

c) $a \neq b, b \neq c, c \neq a$

d) $\nexists a, b, c \in \mathbb{R}$

e) $a = b \neq c$

f) $a \neq b = c$

AL 231 Să se determine mulțimea valorilor lui $m \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + my + m^2z = 0 \\ m^2x + y + mz = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases}$$

să admită și soluții diferite de soluția banală.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ b) $\left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \right\}$ c) $\{\pm 1\}$
d) $\{1\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ f) $\left\{ \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}$

AL 232 Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$
d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$ f) $\{1, \pm 2\}$

AL 233 Fie sistemul

$$\begin{cases} x + ay - 1 = 0 \\ ax - 3ay - (2a + 3) = 0, \quad a \neq 0. \end{cases}$$

Să se determine parametrul real a astfel încât sistemul să fie compatibil nedeterminat. Pentru această valoare, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} u & v \\ 3 & 1 \end{vmatrix},$$

unde (u, v) este soluția sistemului.

- a) u b) v c) uv d) 0 e) 1 f) -1

AL 234 Pentru care din următoarele cazuri de mai jos, sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = b + c \\ bx + cy + az = a + c \\ cx + ay + bz = a + b, \quad a, b, c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

este incompatibil?

- a) $a - b + c = 0$ b) $a, b, c \in \emptyset$ c) $a + b - c = 0$
 d) $a + b - c \neq 0$ e) $a + b + c = 0$ f) $a + b + c \neq 0$

AL 235 Fie sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz = 1 \\ cx + ay + bz = 1 \\ bx + cy + az = 1, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^*. \end{cases}$$

Care dintre următoarele propoziții matematice este adevărată?

- a) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este compatibil determinat
 b) Dacă $a = 1, b = 2, c = -3$ atunci sistemul este incompatibil
 c) Dacă $a = 1, b = 3, c = 2$ atunci sistemul este compatibil nedeterminat
 d) Dacă $a = -1, b = 3, c = -2$ atunci sistemul este compatibil determinat
 e) Dacă $a = b = c$ atunci sistemul este incompatibil
 f) Toate afirmațiile sunt false

AL 236 Fie (z_1, z_2, z_3) o soluție nebanală a sistemului omogen

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

care verifică și condiția suplimentară

$$z_1 + 2^2 z_2 + 3^2 z_3 = z_1 z_2 z_3.$$

Să se determine $|z_1| + |z_2| + |z_3|$.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 237 Fie (x_t, y_t, z_t) soluția sistemului

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 + 2^{t+1} \\ x + 2y + z = 2 + 2^t - \frac{1}{2^t} \\ 2x + y + z = 1 + 2^t + \frac{1}{2^t}, \quad t \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Să se determine

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t y_t z_t.$$

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) 2 e) -2 f) 3

AL 238 Pe \mathbb{Q}^* se definește operația „ $*$ ” care satisface următoarele proprietăți:

- (i) $(x * y) \cdot (z * t) = (x \cdot z) * (y \cdot t)$, pentru orice $x, y, z, t \in \mathbb{Q}^*$;
- (ii) $x * x = 1$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$;
- (iii) $x * 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{Q}^*$,

unde „ \cdot ” este operația de înmulțire în \mathbb{Q}^* . Să se calculeze

$$\sum_{k=1}^{2017} \left[\frac{1}{k} * (k+1) \right].$$

- a) $\frac{2016}{2017}$ b) $\frac{1}{2017}$ c) 2017 d) $\frac{1}{2018}$ e) 2018 f) $\frac{2017}{2018}$

AL 239 Pe mulțimea $(0, +\infty)$ se definește legea de compoziție

$$x \circ y = \frac{xy}{x+y}, \quad x, y \in (0, +\infty).$$

Să se calculeze

$$\frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{50}.$$

- a) $\frac{1}{1225}$ b) $\frac{1}{1274}$ c) 1275 d) $\frac{1}{1275}$ e) 1274 f) $\frac{1}{1300}$

AL 240 Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție

$$x \circ y = (x - a)^2 (y - a) + a, \quad a \in \mathbb{Z}.$$

Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației $x \circ x = x$.

- a) $\{a, a - 1\}$ b) $\{a, a + 1\}$ c) $\{a - 1, a, a + 1\}$
 d) $\{-a, 1 - a\}$ e) $\{-a, -a - 1\}$ f) $\{-a, 1 - a, -a - 1\}$

AL 241 Pe \mathbb{Z} se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy + a(x + y) + a^2 - a, \quad a \in \mathbb{N}^*$$

și mulțimea

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 2^x * 2^y = a^2 + 2a + 2\}.$$

Să se determine

$$\sum_{(x,y) \in M} (x + y).$$

- a) 1 b) -1 c) 2 d) 0 e) -2 f) 3

AL 242 Pe mulțimea numerelor reale se definește operația algebrică

$$x \circ y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă (u, v) , $u, v > 0$, este soluția sistemului

$$\begin{cases} x \circ y \circ 2 = \sqrt{17} \\ x \circ 2 + y \circ 3 = 2\sqrt{13} \end{cases},$$

să se determine $u + v$.

- a) 1 b) 0 c) 5 d) 19 e) $\sqrt{13}$ f) $\sqrt{19}$.

AL 243 Se consideră \mathbb{R} cu legea de compoziție $x * y = ax + y$, $a \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

cu operația de înmulțire a matricelor ” \cdot ”. Știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow M$,

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$$

satisface relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, să se determine mulțimea valorilor lui a .

- a) $\{0\}$ b) $\{-1\}$ c) \mathbb{R} d) \emptyset e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 244 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \{x \mid \exists a, b, c \in \mathbb{Z} \text{ astfel încât } x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\}.$$

Să se determine cea mai mare (în sensul relației de incluziune) mulțime $A \subset \mathbb{Z}$ pentru care \mathcal{M} este parte stabilă a lui \mathbb{Z} în raport cu operația de înmulțire a numerelor întregi.

- a) $\mathbb{N} \setminus \{3\}$ b) \mathbb{Z}^* c) \mathbb{Z} d) \mathbb{N} e) \mathbb{N}^* f) $\mathbb{Z} \setminus \{3\}$

AL 245 Se consideră mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

care este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ în raport cu înmulțirea matricelor. Să se determine mulțimea tuturor valorilor pe care le poate lua $\det A$, știind că și $A^{-1} \in \mathcal{M}$.

- a) $\{0, 1\}$ b) $\{0\}$ c) $\{-1, 1\}$ d) $\{1\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{-1, 0\}$

AL 246 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha x^2 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta x & \gamma \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Să se determine valorile parametrilor $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^*$ astfel încât (\mathcal{M}, \cdot) să fie parte stabilă a lui $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \cdot)$.

- | | | |
|--|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1$ | b) $\alpha = \beta, \gamma = 0$ | c) $\beta = 2\alpha, \gamma = 1$ |
| d) $\alpha = 2\beta, \gamma = -1$ | e) $\alpha = 2\beta, \gamma = 1$ | f) $\alpha = -\beta, \gamma = 1$ |

AL 247 Pe mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

se consideră legea de compoziție $A * B = A \cdot B + aA + bB + 6I_2$. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă și comutativă.

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------|------------------------------|
| a) $a = -2, b \in \mathbb{R}$ | b) $a = b \in \{-2, 3\}$ | c) $a \in \mathbb{R}, b = 3$ |
| d) $a = b \in \{-1, 2\}$ | e) $a = b = -2$ | f) $a, b \in \mathbb{R}$ |

AL 248 Să se determine o relație între parametrii reali a și b astfel încât legea de compoziție $x * y = xy + ax + ay + b$ de pe \mathbb{R} să fie asociativă.

- | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|
| a) $a^2 = a + b$ | b) $a = a^2 + b$ | c) $b^2 + a = a^2$ |
| d) $a + a^2 = b$ | e) $2a = b + a^2$ | f) $2b + a = a^2$ |

AL 249 Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + k.$$

Să se găsească $k \in \mathbb{R}$ astfel încât legea să fie asociativă. Pentru această valoare, să se determine mulțimea soluțiilor ecuației

$$x * x = -2.$$

- | | | | | | |
|------------|-------------|----------------|----------------|----------------|-------------|
| a) $\{1\}$ | b) $\{-1\}$ | c) $\{1, -1\}$ | d) $\{2, -2\}$ | e) $\{1, -2\}$ | f) $\{-2\}$ |
|------------|-------------|----------------|----------------|----------------|-------------|

AL 250 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$x * y = xy - i(x + y) - 1 + i.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi și să se calculeze $i * i^2 * i^3 * i^4 * i^5$.

- a) $e = i, -1 + i$ b) $e = 1 + i, i$ c) $e = 1, 1 - 2i$
d) $e = 1 - i, i$ e) $e = -i, 2 - i$ f) $e = 2 + i, 1 - i$

AL 251 Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x * y = (x - 3)(y - 1) + 3.$$

Să se determine elementul neutru al acestei legi.

- a) nu există b) 4 c) 3 d) 0 e) 2 f) 6

AL 252 Pe mulțimea numerelor întregi impare $2\mathbb{Z} + 1$ se definește operația

$$x * y = \frac{1}{2}(xy + x + y - 1).$$

Să se determine mulțimea elementelor inversabile ale monoidului $(2\mathbb{Z} + 1, *)$.

- a) $\{-3, 1\}$ b) $2\mathbb{N} + 1$
c) $2\mathbb{Z} + 1$ d) $\{-5, -3, 1, 3\}$
e) $\{-3, -1, 1, 3\}$ f) $\{-5, 1\}$

AL 253 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}).$$

Să se determine numărul elementelor simetrizabile ale monoidului (\mathcal{M}, \cdot) , unde ” \cdot ” reprezintă operația de înmulțire a matricelor.

- a) 0 b) 1 c) 8 d) 5 e) 7 f) 9

AL 254 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră legea de compoziție

$$z_1 \perp z_2 = z_1 z_2 + \operatorname{Im}(z_1) \operatorname{Im}(z_2).$$

Să se determine elementele inversabile în raport cu această lege.

- | | |
|---|--|
| a) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = 0\}$ | b) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \neq 0\}$ |
| c) \mathbb{C} | d) \mathbb{C}^* |
| e) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) = 0\}$ | f) $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ |

AL 255 Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

și mulțimea $\mathcal{M} = \{xA + B \mid x \in \mathbb{R}^*\}$. Să se determine mulțimea elementelor inversabile din \mathcal{M} în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

- | | | |
|---------------------------------------|--|---------------------------------------|
| a) \emptyset | b) $\mathcal{M} \setminus \left\{ \frac{1}{2}A + B \right\}$ | c) $\mathcal{M} \setminus \{I_2\}$ |
| d) $\mathcal{M} \setminus \{-A + B\}$ | e) \mathcal{M} | f) $\mathcal{M} \setminus \{2A + B\}$ |

AL 256 Fie $a \geq 0$ și $M = (a, +\infty) \setminus \{a + 1\}$ pe care se definește legea de compoziție

$$x * y = (x - a)^{\ln \frac{k^2}{y-a}} + a, \quad k \geq 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Să se determine simetricul lui $x \in M$.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)} + a}$ | b) $\frac{e^{k^2}}{x-a} + a$ |
| c) $\frac{e^{k^2}}{x-a}$ | d) $e^{\frac{k}{\ln(x-a)}}$ |
| e) $e^{k^2} - x - 2a$ | f) $e^{\frac{k^2}{\ln(x-a)}} + a$ |

AL 257 Pe mulțimea \mathbb{R}_+^* se introduce legea de compoziție

$$x * y = a \sqrt[n]{\log_a^n x + \log_a^n y - \log_a^n b},$$

unde $a, b \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, n impar, $n \neq 1$. Să se determine simetricul lui $x \in \mathbb{R}_+^*$ în raport cu această lege de compoziție.

a) $\frac{b^{2^n}}{x}$

b) $a \sqrt[n]{\log_a^n b + \log_a^n x}$

c) $a \sqrt[n]{2 \log_a^n b - \log_a^n x}$

d) $\frac{b^2}{x}$

e) $a \sqrt[n]{\log_a^n b - \log_a^n x}$

f) $\frac{b^{\sqrt[n]{2}}}{x}$

AL 258 Pe mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se definește legea de compoziție

$$(a, b) * (c, d) = (ac, bc + ad).$$

Să se determine elementele simetrizabile față de legea $*$ din mulțimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

a) $(b, 1), b \in \mathbb{Z}$

b) $(b, 0), b \in \mathbb{Z}$

c) $(b, \pm 1), b \in \mathbb{Z}$

d) $(\pm 1, b), b \in \mathbb{Z}$

e) $(0, b), b \in \mathbb{Z}$

f) $(1, b), b \in \mathbb{Z}$

AL 259 Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, care are toate rădăcinile reale. Știind că mulțimea tuturor acestor soluții este un grup față de legea

$$x * y = x + y + 3, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

să se determine $a + b + c$.

a) -9

b) -27

c) 63

d) 27

e) 54

f) 28

AL 260 Fie $f = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de gradul al treilea. Știind că mulțimea rădăcinilor sale $\{x_1, x_2, x_3\}$ este grup de ordinul trei în raport cu înmulțirea numerelor complexe, să se calculeze $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$.

a) 0

b) -1

c) $-i$

d) 3

e) $3i$

f) 1

AL 261 Fie $f = X^4 + \widehat{a}X^3 + \widehat{b}X^2 + \widehat{c}X + \widehat{d}$ un polinom din $\mathbb{Z}_8[X]$. Să se calculeze $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} + \widehat{d}$ știind că f are patru rădăcini distincte ce formează grup față de înmulțirea din \mathbb{Z}_8 .

- a) $\widehat{0}$ b) $\widehat{1}$ c) $\widehat{5}$ d) $\widehat{4}$ e) $\widehat{2}$ f) $\widehat{7}$

AL 262 Pe mulțimea $G = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ se definește legea de compoziție

$$x * y = 3xy - 3x + 3(a^2 - 2)y - a + 3$$

pentru orice $x, y \in G$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $(G, *)$ este grup.

- a) 0 b) 2 c) -1 d) 1 e) -2 f) 3

AL 263 Fie mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ aX & 1 & 0 \\ na^2X^2 & aX & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

inclusă în mulțimea matricelor pătrate de ordinul 3 cu elemente din mulțimea polinoamelor de grad cel mult 2 având coeficienți reali. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real n astfel încât (G, \cdot) să fie grup.

- a) $\{0\}$ b) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ c) $\{1\}$ d) \mathbb{R} e) \emptyset f) \mathbb{R}^*

AL 264 Să se determine numerele reale a și b astfel încât mulțimea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x + ay & y - bx \\ y + bx & x - ay \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 - 4y^2 = 1 \right\}$$

să formeze un grup în raport cu înmulțirea matricelor.

- a) $b = \sqrt{3}, a = 0$ b) $b = 0, a = \pm\sqrt{3}$
 c) $b = \pm 1, a = \sqrt{3}$ d) $b = 0, a = \pm 1$
 e) $b = 1, a = \sqrt{3}$ f) $b = 0, a = 1$

AL 265 Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ dat și mulțimea

$$G = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{C}, A^n = I_2 \right\}.$$

Câte elemente are grupul G în raport cu înmulțirea matricelor?

- a) $(n-1)^2$ b) n c) $n-1$
 d) $n-2$ e) $(n-2)^2$ f) n^2

AL 266 Fie (G, \cdot) un grup cu e elementul neutru. Știind că există $x, y \in G$ cu proprietățile $x^2 = e$ și $yx = xy^2$, să se determine $y^{2018}x$.

- a) e b) y c) y^{2017} d) x^{2019} e) xy f) $y^{1009}x$

AL 267 Știind că o parte din tabla operației unui grup $G = \{e, a, b, x, y, z\}$ este

*	e	a	b	x	y	z
e	e	a	b	x	y	z
a	a	b	e	y		
b	b					
x		z				a
y						
z						

să se determine $y * z$.

- a) e b) x c) a d) z e) b f) y

AL 268 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$G = \{M(x) = I_3 + xA^2, x \in \mathbb{R}\}.$$

Știind că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = I_3 + xA^2$ este morfism între $(\mathbb{R}, *)$ și (G, \cdot) , unde relația " $*$ " este definită prin $x * y = x + y + axy$, $a \in \mathbb{R}$, iar " \cdot " este înmulțirea matricelor, să se determine valoarea parametrului a .

- a) 1 b) -1 c) 4 d) -4 e) 25 f) -25.

AL 269 Fie \mathbb{R}^* dotată cu legea de compoziție definită prin $a * b = kab$, $k \in \mathbb{R}$ și mulțimea

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}^* \right\}$$

dotată cu înmulțirea matricelor " \cdot ". Știind că funcția

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow M, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$$

este un morfism între grupurile $(\mathbb{R}^*, *)$ și (M, \cdot) , să se determine mulțimea valorilor lui k .

- a) \mathbb{R} b) \mathbb{Z} c) \mathbb{Q} d) $\{0\}$ e) $\{1\}$ f) $\{2\}$

AL 270 Fie $G = (1, +\infty)$ care are o structură de grup față de operația " $*$ " definită prin

$$x * y = \sqrt{x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția

$$f : (0, +\infty) \rightarrow G, \quad f(x) = \sqrt{ax + b}$$

să fie un izomorfism de la grupul $((0, +\infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

- a) $a = 0, b = 2$ b) $a = 1, b \in \{1, 2\}$ c) $a = 0, b = 1$
d) $a = 0, b \in \{1, 2\}$ e) $a = 1, b = 2$ f) $a = b = 1$

AL 271 Pe mulțimea \mathbb{Z} se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = x + y - 5 \text{ și } x \top y = x + y + 5.$$

Să se determine toate perechile $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între grupurile (\mathbb{Z}, \perp) și (\mathbb{Z}, \top) .

- a) $(1, -10), (-1, 0)$ b) $(1, -10)$ c) $(-1, -10)$
d) $(-1, 0)$ e) $(1, 0), (-1, -10)$ f) $(1, 0)$

AL 272 Fie mulțimea

$$M = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in (0, \infty) \right\}.$$

Care din următoarele afirmații este adevărată?

- a) (M, \cdot) nu este grup;
- b) (M, \cdot) este grup comutativ izomorf cu (\mathbb{R}_+^*, \cdot) ;
- c) (M, \cdot) este grup comutativ dar nu este izomorf cu (\mathbb{R}_+^*, \cdot) ;
- d) M nu este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricilor;
- e) Există $a \in (0, \infty)$ astfel încât $A(a)$ să fie singulară;
- f) $I_3 \notin M$.

- a) a b) b c) c d) d e) e f) f

AL 273 Să se determine toate automorfismele f ale grupului $(\mathbb{Z}, +)$.

- a) $f(x) = nx, \forall n, x \in \mathbb{Z}$
- b) $f(x) = \pm x, \forall x \in \mathbb{Z}$
- c) $f(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{Z}$
- d) $f(x) = ax + b, a, b, x \in \mathbb{Z}$
- e) $f(x) = \pm 2x, \forall x \in \mathbb{Z}$
- f) $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Z}$

AL 274 Să se determine numărul tuturor morfismelor de grupuri

$$f : (\mathbb{Z}_6, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$$

astfel încât $f(\widehat{2}) = \widehat{3}$.

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4
- f) o infinitate

AL 275 Fie (G, \cdot) un grup și $f : G \rightarrow G$, $f(x) = x^{2019}$ un endomorfism surjectiv. Să se precizeze care din următoarele relații este adevărată pentru orice $x, y \in G$.

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $x = y$ | b) $xy = y^{-1}x^{-1}$ | c) $xy = yx$ |
| d) $x^{2018}y = yx^{2018}$ | e) $x^{2017}y = yx^{2017}$ | f) $x^{1009}y = yx^{1009}$ |

AL 276 Fie (G, \cdot) un grup pentru care există $f : G \rightarrow G$ astfel încât

$$yf(x^2) = f(y^{-1}xyf(xy))$$

pentru orice $x, y \in G$. Care din următoarele afirmații este adevărată?

- | | |
|---------------------------------------|--|
| a) f nu este injectivă | b) f nu este bijectivă |
| c) f este surjectivă | d) $f(xy) = xy^2, \forall x, y \in G$ |
| e) $f(xy) = y^2x, \forall x, y \in G$ | f) $f(xy) = y^{-1}x, \forall x, y \in G$ |

AL 277 Fie (G, \cdot) un grup cu e elementul neutru, $f : G \rightarrow G$ un endomorfism pentru care există $a, b \in G$ astfel încât $f^2(a) = ab$ și $f^{2018}(a) = e$, iar

$$g(x) = xf^2(x)f^4(x)f^6(x) \dots f^{2016}(x),$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n\text{-ori}}$. Atunci $g(b)$ este:

- | | | | | | |
|--------|--------|-------------|--------|---------------|---------------|
| a) a | b) b | c) a^{-1} | d) e | e) b^{2018} | f) a^{2018} |
|--------|--------|-------------|--------|---------------|---------------|

AL 278 Fie $a, b \in \mathbb{Z}_5$, $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f_{a,b}(x) = ax + b$, $a \neq \widehat{0}$. Să se găsească toate funcțiile $f_{a,b}$ pentru care are loc

$$f_{a,b}^4 = f_{\widehat{2},\widehat{0}}^{2018} \circ f_{\widehat{2},\widehat{2}}^{2020} \circ f_{\widehat{2},\widehat{4}}^{2022},$$

unde $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } n\text{-ori}}$.

- | | | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|---|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| a) $f_{\widehat{2},\widehat{2}}$ | b) $f_{\widehat{1},\widehat{2}}$ | c) $f_{\widehat{1},\widehat{4}}; f_{\widehat{2},\widehat{1}}$ | d) $f_{\widehat{3},\widehat{0}}$ | e) $f_{\widehat{2},\widehat{0}}$ | f) $f_{\widehat{4},\widehat{0}}$ |
|----------------------------------|----------------------------------|---|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|

AL 279 Pe mulțimea numerelor complexe se consideră operațiile algebrice

$$x \perp y = x + y - i \quad \text{și} \quad x \top y = xy + ax + by + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{C}$ pentru care operația " \top " este distributivă în raport cu operația " \perp ".

- | | |
|--------------------------------|----------------------------|
| a) $a = i, b = c = -i - 1$ | b) $a = b = i, c = -i - 1$ |
| c) $a = -i, b = i, c = i - 1$ | d) $a = -i, b = c = i - 1$ |
| e) $a = -i, b = i, c = -i - 1$ | f) $a = b = -i, c = i - 1$ |

AL 280 Fie legile de compoziție

$$x \perp y = x + y + \widehat{10} \quad \text{și} \quad x \top y = xy - \widehat{3}x - \widehat{3}y - \widehat{1}.$$

Să se determine cele două elemente neutre ale inelului $(\mathbb{Z}_{13}, \perp, \top)$.

- | | | |
|---|--|---|
| a) $e_{\perp} = \widehat{10}, e_{\top} = \widehat{3}$ | b) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{3}$ | c) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{6}$ |
| d) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{4}$ | e) $e_{\perp} = \widehat{4}, e_{\top} = \widehat{3}$ | f) $e_{\perp} = \widehat{3}, e_{\top} = \widehat{11}$ |

AL 281 Fie $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Să se determine mulțimea elementelor inversabile ale inelului $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$.

- | | | |
|-----------------------|---|----------------|
| a) $\mathbb{Z}[i]$ | b) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{\pm 1, \pm i\}$ | c) $\{1, i\}$ |
| d) $\{\pm 1, \pm i\}$ | e) $\mathbb{Z}[i] \setminus \{1, i\}$ | f) \emptyset |

AL 282 Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = ax + by - 7 \quad \text{și} \quad x \top y = xy - 7x - 7y + c.$$

Să se determine $a, b, c \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(\mathbb{Z}, \perp, \top)$ să fie un inel.

- | | | |
|-----------------------|------------------------|---------------------|
| a) $a = b = c = 17$ | b) $a = b = 1, c = 56$ | c) $a = b = c = 7$ |
| d) $a = b = 1, c = 7$ | e) $a = b = c = 1$ | f) $a = b = c = -1$ |

AL 283 Pe mulțimea numerelor întregi se definesc legile de compoziție

$$x * y = x + y - 2 \quad \text{și} \quad x \circ y = xy - 2x - 2y + 6.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe izomorfismul $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

a) $a = 1, b = 0$

b) $a = 1, b = 1$

c) $a = 1, b = 2$

d) $a = 2, b = 1$

e) $a = 1, b = -2$

f) $a = -1, b = 2$

AL 284 Fie $(A, +, \cdot)$ un inel unitar cu proprietatea $x^2 = 3x$ pentru orice $x \in A$. Atunci $2016x$ este:

a) $2x$

b) 1

c) x

d) $-x$

e) $-3x$

f) $3x$

AL 285 Fie \mathcal{A} este un inel și $f : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, $f(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2$. Să se determine

$$f(1+x, 1+y) - f(1+x, y) - f(x, 1+y) + f(x, y).$$

a) 0

b) xy

c) yx

d) $xy - yx$

e) $yx - xy$

f) $xy + yx$

AL 286 Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție

$$x \perp y = x + y - 1 \quad \text{și} \quad x \top y = 2xy - 2(x + y) + 3.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ să fie un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$.

a) $a = b = 1$

b) $a = b = \frac{1}{2}$

c) $a = 0, b = 1$

d) $a = 1, b = 0$

e) $a = 1, b = \frac{1}{2}$

f) $a = \frac{1}{2}, b = 1$

AL 287 Fie mulțimea

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x + ay & by \\ cy & x - ay \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Să se determine o relație între parametri reali a, b, c astfel încât

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{K} \quad f(x + yi) = \begin{pmatrix} x + ay & by \\ cy & x - ay \end{pmatrix}$$

să fie izomorfism între corpul $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ și corpul $(\mathcal{K}, +, \cdot)$.

- | | | |
|-----------------------|-------------------|-------------------|
| a) $2a + bc = 1$ | b) $a^2 + bc = 1$ | c) $2a = bc - 1$ |
| d) $a^2 + bc + 1 = 0$ | e) $a^2 = bc - 1$ | f) $a^2 - bc = 1$ |

AL 288 Fie sistemul

$$\begin{cases} \widehat{4}x + \widehat{3}y = \widehat{6} \\ \widehat{3}x + \widehat{2}y = \widehat{1} \end{cases}$$

în \mathbb{Z}_{11} cu soluția (x_0, y_0) . Dacă y'_0 este inversul lui y_0 în corpul $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$, să se determine $m \in \mathbb{Z}_{11}$ astfel încât $\widehat{3}x_0^2 + my'_0 = x_0$.

- | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|
| a) $\widehat{5}$ | b) $\widehat{1}$ | c) $\widehat{3}$ | d) $\widehat{4}$ | e) $\widehat{10}$ | f) $\widehat{9}$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|------------------|

AL 289 Să se determine $a \in \mathbb{Z}_8$ pentru care sistemul

$$\begin{cases} a^2x + y = \widehat{5} \\ \widehat{3}x + ay = \widehat{7} \end{cases}$$

are soluția $(\widehat{3}, \widehat{2})$ și să se specifice numărul total al soluțiilor.

- | | |
|---|---|
| a) $a = \widehat{2}$, 5 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții | b) $a = \widehat{4}$, 7 soluții; $a = \widehat{6}$, 3 soluții |
| c) $a = \widehat{1}$, 3 soluții; $a = \widehat{5}$, 8 soluții | d) $a = \widehat{3}$, 8 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții |
| e) $a = \widehat{1}$, 5 soluții; $a = \widehat{5}$, 3 soluții | f) $a = \widehat{3}$, 6 soluții; $a = \widehat{7}$, 4 soluții |

AL 290 În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ să se rezolve ecuația

$$X^{2021} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$

AL 291 Fie mulțimea

$$\mathcal{M} = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{4x} \\ \widehat{6x} & \widehat{1} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{Z}_{12} \right\}.$$

Să se determine toate soluțiile ecuației $A^2(x) + 2A(x) = \begin{pmatrix} \widehat{3} & \widehat{4} \\ \widehat{0} & \widehat{3} \end{pmatrix}$.

- a) $A(\widehat{7})$ b) $A(\widehat{3})$
c) $A(\widehat{2}), A(\widehat{5}), A(\widehat{8})$ d) $A(\widehat{1}), A(\widehat{4})$
e) $A(\widehat{0})$ f) nu are soluții

AL 292 Fie matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$,

$$A = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}.$$

Să se determine A^{-1} .

- a) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{2} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{2} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{2} & \widehat{2} \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{2} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{2} \end{pmatrix}$

AL 293 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} m & \widehat{0} & \widehat{1} \\ m & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$. Să se afle $m \in \mathbb{Z}_3$ pentru care A este inversabilă și să se determine A^{-1} .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } m = \widehat{0}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix} & \text{b) } m = \widehat{1}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix} \\ \text{c) } m = \widehat{0}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{2} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix} & \text{d) } m = \widehat{2}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \end{pmatrix} \\ \text{e) } m = \widehat{1}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{2} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{2} & \widehat{1} & \widehat{0} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix} & \text{f) } m = \widehat{0}, A^{-1} = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \widehat{0} & \widehat{1} \\ \widehat{0} & \widehat{1} & \widehat{1} \\ \widehat{1} & \widehat{0} & \widehat{0} \end{pmatrix} \end{array}$$

AL 294 Fie polinomul $P = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$. Să se determine polinomul Q astfel încât să fie îndeplinită condiția

$$P(x) = Q(x) + 2Q'(x) + 3Q''(x) + 4Q'''(x),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1 & \text{b) } 4X^3 - 21X^2 + 2X + 1 \\ \text{c) } 4X^3 - 21X^2 + 14X + 3 & \text{d) } 4X^3 - 7X^2 + 21X + 12 \\ \text{e) } 4X^3 + 2X^2 + 3X + 1 & \text{f) } -4X^3 + 12X^2 + 13X - 1 \end{array}$$

AL 295 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a^2+x^2 & b^2+x^2 & c^2+x^2 \\ a^3+x^3 & b^3+x^3 & c^3+x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

f) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

f) $b = 3, c = 2a + 1, a \in \mathbb{R}$

AL 299 Se consideră polinomul $f = X^6 + aX^5 + bX^4 + cX^3 + aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine a, b, c pentru care polinomul f se divide cu polinomul $g = X^5 - 5X^3 + 4X$.

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| a) $a, b, c \in \emptyset$ | b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ |
| c) $a = b = c = 0$ | d) $a = c = 1, b = -1$ |
| e) $a = c = -1, b = 1$ | f) $a = 1, b = -5, c = 4$ |

AL 300 Să se determine polinomul cu coeficienți raționali de grad minim care împărțit la $X^2 + 2X - 3$ dă restul $3X + 11$ și împărțit la $X^2 - 4X + 5$ dă restul $7X - 3$.

- | | | |
|---------------------|--------------------|---------------------|
| a) $-X^3 - 4X + 12$ | b) $X^3 + 2X - 17$ | c) $-X^3 + 4X + 11$ |
| d) $X^3 - 4X + 17$ | e) $X^3 + 3X + 15$ | f) $-X^3 + 17X - 5$ |

AL 301 Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ și } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărțirii lui g la f .

- | | | |
|---------------|----------------------|---------------|
| a) X | b) 0 | c) $X - 2000$ |
| d) $X + 2014$ | e) $2016 \cdot 2014$ | f) $X - 2016$ |

AL 302 Să se determine parametrii reali a, b, c astfel încât polinomul $f = (X - 1)^7 + a(X - 1)^4 + bX + c$ să se dividă cu $(X + 1)^3$.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $a = 28, b = 448, c = 128$ | b) $a = 56, b = 448, c = 576$ |
| c) $a = 56, b = 320, c = 81$ | d) $a = 28, b = 448, c = 192$ |
| e) $a = 84, b = 320, c = 81$ | f) $a = 28, b = 320, c = 128$ |

AL 303 Să se determine parametrii reali m și n astfel încât polinomul $X^9 + mX^2 + n$ să se dividă cu polinomul $X^2 + X + 1$.

- a) $m = 0, n = 0$ b) $m = 0, n = -1$ c) $m = -1, n = 0$
d) $m = -1, n = -1$ e) $m = 1, n = 0$ f) $m = 0, n = 1$

AL 304 Să se determine restul împărțirii polinomului X^n la polinomul $X^2 + 2X - 3$.

- a) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + (-3)^n}{4}$ b) $\frac{1}{4}[(1 + (-3)^n)X + 3 + (-3)^n]$
c) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 - (-3)^n}{4}$ d) $\frac{2 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + (-3)^n}{4}$
e) $\frac{1 - (-3)^n}{4}X + \frac{3 + 3^n}{4}$ f) $\frac{1}{4}[(1 + 3^n)X + 3 + (-3)^n]$

AL 305 Să se determine restul împărțirii polinomului $(X^3 + X + 1)^{19}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

- a) -1 b) X c) $X + 1$ d) 0 e) $X - 1$ f) 1

AL 306 Să se determine parametrul $a \in \mathbb{R}$ și să se rezolve ecuația

$$x^4 + ax^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0,$$

știind că are rădăcini opuse.

- a) $a = -3, \{1, 2, \pm\sqrt{2}i\}$ b) $a = -1, \{\pm 1, \pm 2\}$
c) $a = 2, \{1, 2, \pm 2i\}$ d) $a = -2, \{1 \pm i, \pm 1\}$
e) $a = -1, \{\pm 2, \pm i\}$ f) $a = -3, \{\pm 1, \pm\sqrt{2}i\}$

AL 307 Fie polinomul $f = X^4 + a^2X^3 - 7X^2 + aX + 6$. Să se determine mulțimea tuturor valorilor întregi ale lui a astfel încât f să aibă o rădăcină întreagă impară.

- a) \emptyset b) \mathbb{R} c) $\left\{-1, \frac{8}{9}\right\}$
 d) $\left\{-1, 0, \frac{8}{9}\right\}$ e) $\{-1, 0\}$ f) $\{-1\}$

AL 308 Fie polinomul $f = X^3 + X^2 - 2X - 2$. Să se determine descompunerea lui f în factori ireductibili în $\mathbb{Q}[X]$.

- a) $(X + 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$ b) $(X - 1)(X^2 + 2)$
 c) $(X + 1)(X^2 - 2)$ d) $(X - 1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$
 e) $(X + 1)(X - 2)(X + 2)$ f) $(X + 1)(X^2 + 2)$

AL 309 Să se descompună în factori ireductibili peste \mathbb{Z}_5 polinomul

$$f = X^4 + \widehat{2}X^3 + \widehat{4}X + \widehat{3} \in \mathbb{Z}_5[X].$$

- a) $(X + \widehat{4})^2(X^2 + X + \widehat{1})$ b) $(X + \widehat{4})(X + \widehat{2})(X^2 + \widehat{1})$
 c) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{3})^2(X + \widehat{1})$ d) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{3})(X^2 + \widehat{1})$
 e) $(X + \widehat{2})^2(X^2 + X + \widehat{1})$ f) $(X + \widehat{2})(X + \widehat{4})(X^2 + X + \widehat{1})$

AL 310 Fie polinomul $f = (1 - 2X)^{2017} + (3X - 2)^{2017}$. Să se calculeze suma coeficienților polinomului f .

- a) 2017 b) 4034 c) 0 d) 2^{2017} e) 3^{2017} f) $(-1)^{2017}$

AL 311 Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația

$$x^4 + 5x^3 + ax^2 + 2x + b = 0$$

să admită soluția $1 + i$ și să se găsească celelalte soluții.

- a) $a = -6, b = 12, \{1 - i, -1, -6\}$ b) $a = -3, b = 6, \{1 - i, 1 + i, -1\}$
 c) $a = 12, b = -6, \{1 - i, 1, 12\}$ d) $a = 6, b = -12, \{1 + i, -1, -3\}$
 e) $a = -6, b = 12, \{1 - i, -1, 6\}$ f) $a = 4, b = 6, \{1 + i, 1, 6\}$

AL 312 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ având coeficientul dominant 1. Știind că

$$xP(x-1) = (x-3)P(x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(5)$.

- a) 0 b) 10 c) 20 d) 30 e) 50 f) 60

AL 313 Fie polinomul $P = X^3 + mX^2 + nX - a^3$, unde $m, n \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$. Știind că $P(a-x) + P(a+x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se determine $P(2017)$.

- a) 0 b) a c) $(2017 - a)^3$ d) 2017^3 e) a^3 f) 2017

AL 314 Polinoamele cu coeficienți reali $aX^2 + bX + c, aX^3 + bX^2 + bX + a$ și $aX^3 + cX^2 + cX + a, a \neq 0$, admit o rădăcină comună dacă și numai dacă:

- a) $a, b, c \in \mathbb{R}$ b) $a + b + c = 0, b \neq c$
 c) $a - b + c = 0, b \neq c$ d) $a + b - c = 0$
 e) $-a + b + c = 0$ f) $-a + b + c = 0, a \neq b$.

AL 315 Fie polinoamele $P = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$ și $Q = aX + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Să se calculeze suma soluțiilor ecuației $P(Q(x)) = 0$.

- a) 0 b) $\frac{a}{b}$ c) $\frac{6-3b}{a}$ d) $\frac{b}{a}$ e) $\frac{1-b}{a}$ f) 1

AL 316 Fie polinoamele P și Q cu proprietatea $P(x) = Q(x) + Q(1-x)$. Știind că P are coeficienți naturali și $P(0) = 0$, să se determine $P(P(3))$.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AL 317 Fie polinoamele P și $Q \in \mathbb{C}[X]$ cu proprietatea

$$P(x) = Q(x) + Q(1 - x),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$. Știind că P are coeficientul dominant 1, gradul cel mult 5 și rădăcinile -1 și 0 , să se determine $P(3)$.

- a) 60 b) 0 c) 24 d) -24 e) -60 f) 1

AL 318 Fie polinomul $P \in \mathbb{R}[X]$ cu proprietatea $P(x) = -P(-x)$, iar restul împărțirii lui P la $X - 7$ este 3. Să se determine restul împărțirii lui P la $X^2 - 7X$.

- a) $\frac{7}{3}$ b) $\frac{3}{7}X$ c) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) 0 f) $-\frac{3}{7}$

AL 319 Fie polinomul $P = X^4 - \sqrt{3}mX + n$, $m, n \in \mathbb{Q}$. Să se determine valorile parametrilor m, n , știind că restul împărțirii lui $P(X+2)$ la $X+1$ este $3 - \sqrt{3}$.

- a) $m = 0, n = 1$ b) $m = 1, n = 1$ c) $m = 1, n = 2$
d) $m = 2, n = 1$ e) $m = 2, n = 2$ f) $m = 1, n = 0$

AL 320 Știind că polinomul $P = X^3 + pX + q$ are rădăcinile x_1, x_2, x_3 , să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 \\ x_2 - x_1x_2x_3 & x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 \\ x_3 - x_1x_2x_3 & x_1 - x_1x_2x_3 & x_2 - x_1x_2x_3 \end{vmatrix}.$$

- a) p b) q c) pq d) $9pq$ e) $\frac{p}{q}$ f) $\frac{q}{p}$

AL 321 Dacă polinoamele $f_i \in \mathbb{C}[X]$,

$$f_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} X^{k-1}, \quad i = \overline{1, 3},$$

au o rădăcină comună, să se găsească valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- | | |
|---|--|
| a) -1 | b) $(a_{12} - a_{23})(a_{13} - a_{32})(a_{23} - a_{31})$ |
| c) $3a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12} - a_{23} - a_{31}$ | d) 0 |
| e) 1 | f) $a_{12}a_{23}a_{31}$ |

AL 322 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix},$$

unde x_i , $i = \overline{1, 3}$ sunt soluțiile ecuației $x^3 - x^2 - 11 = 0$.

- | | | | | | |
|---------|--------|--------|---------|----------|--------|
| a) -1 | b) 0 | c) 1 | d) 11 | e) -11 | f) 2 |
|---------|--------|--------|---------|----------|--------|

AL 323 Fie ecuația $x^3 - ax + a^2 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, cu soluțiile x_1, x_2, x_3 . Să se determine valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

- | | | | | | |
|--------|-----------|----------|-----------|------------|------------|
| a) 0 | b) $-a^2$ | c) a^2 | d) $2a^2$ | e) $-3a^2$ | f) $-2a^2$ |
|--------|-----------|----------|-----------|------------|------------|

AL 324 Știind că x_1, x_2, x_3 sunt soluțiile ecuației $3x^3 - 17x - 15 = 0$, să se calculeze determinantul

$$\begin{vmatrix} x_1x_2 + x_3 & x_1 + x_2 & -x_1x_2 \\ x_2x_3 + x_1 & x_2 + x_3 & -x_2x_3 \\ x_3x_1 + x_2 & x_3 + x_1 - x_2 & x_2 - x_3x_1 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) 3 c) -17 d) $\frac{17}{3}$ e) 7 f) -5

AL 325 Se consideră ecuația $x^3 - 4x^2 + 10 = 0$ cu soluțiile x_1, x_2, x_3 și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}.$$

Să se determine valoarea lui Δ^2 .

- a) 140 b) 36 c) 144 d) -140 e) -36 f) -144

AL 326 Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1i & a_1 - b_1i & b_1 - c_1 \\ a_2 + b_2i & a_2 - b_2i & b_2 - c_2 \\ a_3 + b_3i & a_3 - b_3i & b_3 - c_3 \end{vmatrix},$$

unde a_k, b_k, c_k sunt soluțiile ecuației $x^3 + \alpha_k = 0$, $\alpha_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 3}$.

- a) $(a_1 + b_1)(b_2 + c_2)(c_3 + a_3)$ b) $a_1b_2c_3$
 c) 0 d) 1
 e) $a_1 + a_2 + a_3 + i(c_1 + c_2 + c_3)$ f) $(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)(b_3 - c_3)$

AL 327 Fie $f = X + a$ și $g = X^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea minimă a lui

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} 1 & f(2) & g(2) \\ 1 & f(3) & g(3) \\ 1 & f(x) & g(x) \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) $\frac{5}{2}$ b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $-(a + b + c)^2$ e) 1 f) abc

AL 328 Suma soluțiilor comune ale ecuațiilor

$$x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 11x^2 - 6x - 4 = 0,$$

$$x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 12x + 8 = 0$$

este:

- a) 1 b) 0 c) $2\sqrt{5}$ d) 3 e) $1 + \sqrt{5}$ f) $\sqrt{5}$

AL 329 Fie $P \in \mathbb{R}[X]$ polinomul de grad minim care satisface simultan condițiile:

(i) $P + 1$ este divizibil cu $(X - 1)^3$;

(ii) $P - 1$ este divizibil cu $(X + 1)^3$.

Să se calculeze $P(0)$.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) 2017 e) -2017 f) 2

AL 330 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție injectivă. Să se determine suma coeficienților polinomului $P \in \mathbb{R}[X]$ care satisface relația

$$-2x + 4 + 5f(x + 2) = 4f(3x - 2) + f(2x - 7P(x - 1)),$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

- a) 1 b) 2 c) 0 d) -1 e) -2 f) 3

AL 331 Fie x_1, x_2, x_3, x_4 soluțiile ecuației $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$. Dacă $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$, atunci ele verifică relația:

a) $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -2$

b) $x_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, i = \overline{1, 4}$

c) $x_1x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$

d) $x_1x_2x_3 - x_4 = -2$

e) $x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -2$

f) $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2$.

AL 332 Fie polinomul $f = X^3 - mX^2 + 2X + 3$, $m \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine mulțimea valorilor parametrului m pentru care are loc relația

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} .$$

- a) \emptyset b) $\{1\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\pm\sqrt{\frac{10}{3}}\right\}$ e) $\left\{\pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right\}$ f) $\left\{\pm\frac{10}{3}\right\}$

AL 333 Fie polinomul $f = X^4 - 5X^3 + 2X^2 - 3X + 1$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3 și x_4 . Să se calculeze valoarea expresiei

$$\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3} + \frac{1}{2-x_4} .$$

- a) 0 b) 1 c) 23 d) $\frac{21}{23}$ e) $\frac{23}{21}$ f) $-\frac{21}{23}$

AL 334 Fie polinomul $f = X^3 + 5X + 3$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Să se determine polinomul care are ca rădăcini pe x_1^2, x_2^2, x_3^2 .

- a) $X^3 + 15X^2 + 10X - 7$ b) $X^3 - 5X^2 + 25X + 5$
c) $X^3 + 10X^2 + 25X - 9$ d) $X^3 - 10X^2 - 5X + 3$
e) $X^3 + 15X^2 - 5X + 5$ f) $X^3 - 10X^2 + 25X - 9$

AL 335 Să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ știind că soluțiile ecuației

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 64 = 0$$

sunt numere naturale în progresie geometrică cu rația număr natural.

- a) $a = 5, b = 67, c = 100$ b) $a = -15, b = 70, c = -120$
c) $a = 15, b = 70, c = 120$ d) $a = -5, b = 67, c = 100$
e) $a = 15, b = -70, c = 120$ f) $a = 5, b = -67, c = -100$

AL 336 Câte polinoame de forma $P(X) = X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, au proprietatea că rădăcinile lor satisfac condițiile $x_1^3 = x_2$ și $x_2^3 = x_1$?

- | | | |
|-------------|-----------------|---------|
| a) niciunul | b) 100 | c) 4 |
| d) 1000 | e) o infinitate | f) unul |

AL 337 Fie polinomul $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 simple. Să se determine valoarea expresiei

$$x_1P'(x_1) + x_2P'(x_2) + x_3P'(x_3).$$

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| a) 0 | b) $9c - a^2 + 2ab$ | c) $2ab - a^3 - 9c$ |
| d) $4ab - 9c - a^3$ | e) $9c + a^2 - 4ab$ | f) $c - a + bc$ |

AL 338 Împărțind polinomul X^8 la $X - 1$ se obține câtul q_1 și restul r_1 , împărțind polinomul q_1 la $X - 1$ se obține câtul q_2 și restul r_2 , iar continuând procedeul și definind recursiv polinoamele q_{k+1} și restul r_{k+1} ca fiind, respectiv, câtul și restul împărțirii lui q_k la $X - 1$, pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$, să se determine r_5 .

- | | | | | | |
|------|------|------|-------|--------|--------|
| a) 1 | b) 2 | c) 7 | d) 70 | e) 100 | f) 700 |
|------|------|------|-------|--------|--------|

PROBLEME DE TRIGONOMETRIE ȘI GEOMETRIE PLANĂ (simbol TG)

TG 1 Să se calculeze $\sin^2 120^\circ - \cos^2 30^\circ$.

- a) $-\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{2}$ c) -1 d) 0 e) 1 f) $\sqrt{3}$

TG 2 Fie $x \in (0, \pi)$ astfel încât $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Să se determine $\operatorname{tg} x$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) 1 c) $\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{3}$ e) -1 f) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

TG 3 Se consideră expresia $E(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos x$, unde $x \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

- a) 1 b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ e) 0 f) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

TG 4 Valoarea lui $a \in (0, \pi)$ pentru care $2 \cos(\pi - a) - 1 = 0$ este:

- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{12}$ f) $\frac{5\pi}{12}$.

TG 5 Să se calculeze $\sin(2x)$ știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 6 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(2x)$. Dacă $f(a) = \frac{1}{3}$, atunci $f\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ este:

- a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ c) 1 d) -1 e) $\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$.

TG 7 Se consideră următoarele propoziții matematice:

- (i) $\sin 144^\circ = \cos 54^\circ$; (ii) $\cos 2018^\circ = -\cos 38^\circ$;
 (iii) $\operatorname{tg}^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$; (iv) $\sin^2 5^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 85^\circ = \frac{3}{2}$;
 (v) $(\operatorname{ctg} 10^\circ - \operatorname{ctg} 80^\circ) \cos 70^\circ = 2 \sin 110^\circ$.

Câte dintre afirmațiile date sunt false?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 8 Care dintre numerele:

$a = \cos 55^\circ$, $b = \sin 155^\circ$, $c = \sin 15^\circ$, $d = \cos 170^\circ$, $e = \cos 100^\circ$, $f = \sin 106^\circ$
 este cel mai aproape de zero?

- a) a b) b c) c d) d e) e f) f

TG 9 Să se calculeze $\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b$, dacă $a, b \in (0, \pi) \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ astfel încât $\cos a + \cos b = 0$.

- a) $\operatorname{tg}(a+b) + 1$ b) 1 c) $2\operatorname{tg} a$ d) 0 e) -1 f) $2\operatorname{tg} b$

TG 10 Dacă $\sin a = \frac{3}{5}$, $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, atunci $\cos \frac{a}{2}$ este egal cu:

- a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ f) $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

TG 11 Fie x un număr real pentru care $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2$. Să se calculeze $\operatorname{tg} x$.

- a) $\frac{1}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) 1 d) -1 e) 3 f) -3

TG 12 Valoarea expresiei $E(x) = \frac{3 + \cos 2x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{3 - \cos 2x}{2 + \operatorname{ctg}^2 x}$, $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$ este:

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) -1 f) 4.

TG 13 Să se calculeze $\cos \frac{3a}{2}$, știind că $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{6}}{9}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

TG 14 Să se determine partea întreagă a numărului $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{12}$.

- a) -4 b) -3 c) -1 d) 3 e) 4 f) 5

TG 15 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$. Să se calculeze $\sin x$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{4}$

TG 16 Să se determine valoarea maximă a expresiei

$$E(x) = \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

- a) 2 b) $\frac{1 + \sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\frac{3}{2}$

TG 17 Se consideră expresia

$$E(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x - (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \sin^2 x + x,$$

unde $x \in (0, \pi) \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$. Să se calculeze $E\left(\frac{\pi}{4}\right) + E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

- a) 0 b) $1 + \pi$ c) $\pi - 1$ d) π e) $\pi + 2$ f) $\frac{\pi}{2}$

TG 18 Dacă $x = \frac{\pi}{8}$, atunci valoarea expresiei

$$E(x) = \frac{\cos 2x + 4 \cos x + 3}{1 + \cos x} + \frac{\cos 2x - 4 \cos x + 3}{1 - \cos x}$$

este:

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 4 e) -1 f) 0.

TG 19 Să se calculeze $\sin^8 \frac{\pi}{8} + \cos^8 \frac{\pi}{8}$.

- a) $\frac{17}{32}$ b) $\frac{3}{16}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{7}{32}$ e) $\frac{7}{16}$ f) $\frac{19}{32}$

TG 20 Să se calculeze $\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\sqrt{3}$

TG 21 Fie $E(x) = \cos^6 x + \sin^6 x$ definită pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Să se determine raportul dintre valoarea maximă și valoarea minimă a expresiei.

- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4 e) 7 f) 8.

TG 22 Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$. Să se calculeze $\sin x - \cos x$.

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ f) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

TG 23 Să se calculeze $\cos 8x$ știind că $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x = \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

- a) -1 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) 0 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

TG 24 Să se calculeze $\cos(x + 2y)$ știind că $x = \frac{4\pi}{3}$ și $\operatorname{tg} y = 2 - \sqrt{3}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TG 25 Fie a și b două numere reale astfel încât

$$\sin a + \sin b = 1 \text{ și } \cos a + \cos b = \frac{1}{2}.$$

Să se calculeze $\cos(a - b)$.

- a) $\frac{3}{8}$ b) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{2}$ f) $-\frac{1}{2}$

TG 26 Fie funcția $f(x) = \cos x - \sin x$. Să se determine cea mai mică valoare a lui f pe intervalul $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

- a) -1 b) -3 c) $-\sqrt{3}$ d) $-\sqrt{2}$ e) $-\frac{1}{2}$ f) -2

TG 27 Fie $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Să se determine imaginea funcției f .

- a) $(-1, \sqrt{3}]$ b) $(-1, 2]$ c) $[-1, 2]$
 d) $(-\sqrt{3}, 1]$ e) $[-1, \sqrt{3}]$ f) $(-\sqrt{3}, 1)$

TG 28 Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 10$ și $BC = 2\sqrt{5}$. Dacă $DE \perp AC$, $E \in AB$ și $DE \cap AC = \{Q\}$, să se calculeze AQ .

- a) 2 b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{\sqrt{30}}{3}$ d) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ f) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

TG 29 Într-un triunghi dreptunghic ABC au loc relațiile $\cos B > \cos C$ și $\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = 6$. Să se calculeze $\sin B - \sin C$.

- a) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ f) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

TG 30 Fie triunghiul ABC cu $AB = 4$ și $m(\widehat{BAC}) = 30^\circ$ astfel încât latura (BC) are cea mai mică valoare posibilă. Dacă punctul P este egal depărtat de laturile triunghiului, să se calculeze AP .

- a) $\sqrt{3}$ b) 2 c) $2\sqrt{2}$ d) 3 e) $2\sqrt{3}$ f) 1

TG 31 Lungimea ipotenuzei triunghiului dreptunghic în care între catete există relația $c - b = 1$, iar $m(\widehat{C}) - m(\widehat{B}) = 30^\circ$, este:

- a) $\sqrt{3} + 1$ b) 3 c) $3\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3} - 1$ e) $3 + \sqrt{3}$ f) $2\sqrt{3}$.

TG 32 Fie triunghiul ABC de laturi a, b, c cu $b = 5$, $c = 8$ și $\cos A = \frac{1}{4}$. Să se afle a .

- a) $\sqrt{69}$ b) $\sqrt{109}$ c) $\sqrt{89}$ d) 89 e) 109 f) 69

TG 33 Fie triunghiul PQR cu $PQ = 4$, $QR = 5$ și $RP = 7$. Să se determine $\cos(\widehat{PQR})$.

- a) $\frac{29}{35}$ b) $-\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{4}{7}$ e) $\frac{5}{7}$ f) $-\frac{4}{7}$

TG 34 În triunghiul ABC , $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$, $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Să se calculeze $\sin B$.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

TG 35 Aria triunghiului ABC este 10 m^2 . Să se determine AB știind că $AC = 4 \text{ m}$ și unghiul \widehat{BAC} are 30° .

- a) $\frac{10}{3} \text{ m}$ b) 5 m c) $\frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ d) 10 m e) 20 m f) 8 m

TG 36 Într-un cerc cu raza de 4 cm se înscrie un triunghi ABC ce are unghiul \widehat{ABC} de 30° . Să se determine lungimea laturii $[AC]$.

- a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) $4\sqrt{3} \text{ cm}$ e) $3\sqrt{3} \text{ cm}$ f) $2\sqrt{3} \text{ cm}$

TG 37 Fie triunghiul ABC cu $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 6$ și $\text{tg } A = -\sqrt{2}$. Să se determine BC .

- a) $6\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{6}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $3\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{6}$ f) $6\sqrt{3}$

TG 38 Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$, $BC = 8$, $CA = 7$ și punctul $P \in (BC)$ astfel încât $BP = 6$. Să se calculeze AP .

- a) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ c) $3\sqrt{3}$ d) 5 e) $3\sqrt{7}$ f) $4\sqrt{3}$

TG 39 Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ și aria egală cu $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin C$.

- a) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ b) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ c) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ d) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

TG 40 Un triunghi are aria $2\sqrt{3}$, perimetrul 12 și un unghi de 60° . Să se afle lungimea razei cercului circumscris triunghiului.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 41 Se consideră punctele A, B, C astfel încât $AB = 5$, $AC = 8$ și $m(\widehat{BAC}) = 60^\circ$. Să se calculeze lungimea minimă pe care o poate avea un segment $[AP]$ atunci când P este un punct variabil pe dreapta BC .

- a) 5 b) $7 - \sqrt{3}$ c) $\frac{20}{7}$ d) $\frac{20\sqrt{3}}{7}$ e) $\frac{20}{\sqrt{89} + 40\sqrt{3}}$ f) 4

TG 42 În triunghiul ABC de arie $3\sqrt{15}$, suma pătratelor lungimilor laturilor este egală cu 116. Să se calculeze $\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$.

- a) $\frac{29\sqrt{15}}{45}$ b) $\frac{29\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{29\sqrt{3}}{5}$ d) $\frac{3\sqrt{29}}{5}$ e) $\frac{29\sqrt{5}}{45}$ f) $\frac{5\sqrt{29}}{3}$

TG 43 Se consideră un triunghi cu proprietatea că lungimile laturilor sale sunt trei numere naturale consecutive și unul din unghiuri are măsura egală cu dublul măsurii altui unghi. Atunci suma lungimilor laturilor sale este:

- a) 15 b) 12 c) 18
d) 30 e) 45 f) nu există un astfel de triunghi.

TG 44 Se consideră triunghiul ABC cu $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$ și $m(\hat{A}) = \frac{\pi}{3}$. Să se determine lungimea bisectoarei (AD) , $D \in (BC)$, a unghiului \widehat{BAC} .

- | | | |
|--------------------|-------------------|--------------------|
| a) $3 - \sqrt{6}$ | b) $\sqrt{2} - 6$ | c) $\sqrt{6} - 2$ |
| d) $3\sqrt{6} - 6$ | e) $\sqrt{6} - 6$ | f) $3\sqrt{6} - 3$ |

TG 45 Se consideră triunghiul ABC cu perimetrul

$$\mathcal{P} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$$

și măsurile unghiurilor direct proporționale cu numerele 3, 4, 5. Să se afle aria triunghiului ABC .

- | | | |
|--------------------------|--------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ | b) $\sqrt{6} + 3$ | c) $\sqrt{3} + 3$ |
| d) $4\sqrt{3}$ | e) $3\sqrt{3} + 3$ | f) $6 + \sqrt{2}$ |

TG 46 Se consideră triunghiul ABC de laturi a, b, c , în care $m(\hat{C}) = \frac{3\pi}{8}$, iar $m(\hat{B}) = \frac{\pi}{8}$. Să se calculeze $E = 4\frac{c^2}{a^2} - \frac{b}{c}$.

- | | | | | | |
|---------------|------|-------------------|------|--------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{2}$ | b) 3 | c) $\sqrt{2} + 3$ | d) 4 | e) $3\sqrt{3} + 3$ | f) $\sqrt{2} - 1$ |
|---------------|------|-------------------|------|--------------------|-------------------|

TG 47 Triunghiul ABC are o latură de 9 cm și perimetrul de 50 cm. Să se calculeze aria maximă pe care o poate avea triunghiul.

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------------|
| a) 90 cm^2 | b) 120 cm^2 | c) $120\sqrt{2} \text{ cm}^2$ |
| d) 200 cm^2 | e) 400 cm^2 | f) $300\sqrt{2} \text{ cm}^2$ |

TG 48 În triunghiul ABC , $AB = 2\sqrt{3}BC$ și $m(\hat{C}) = m(\hat{A}) + 30^\circ$. Să se calculeze $\sin B$.

- | | | | | | |
|------|-------------------------|------------------|-------------------------|--------------------|------------------|
| a) 1 | b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | c) $\frac{1}{3}$ | d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | e) $\frac{11}{14}$ | f) $\frac{2}{3}$ |
|------|-------------------------|------------------|-------------------------|--------------------|------------------|

TG 49 Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu $AD \cap BE = \{O\}$. Se consideră afirmațiile:

$$\begin{array}{ll} (i) \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} = \vec{0}; & (ii) \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}; \\ (iii) \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OF} = \vec{0}; & (iv) \vec{AO} - \vec{FO} = \vec{FA}; \\ (v) \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}; & (vi) \vec{CE} = -2\vec{AB} + \vec{BC}. \end{array}$$

Câte dintre afirmațiile de mai sus sunt corecte?

- a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6 f) 1

TG 50 Asupra unui corp punctiform acționează două forțe cu aceeași origine, una de $8N$ și cealaltă de $7N$. Să se calculeze mărimea forței rezultante, știind că unghiul dintre cele două forțe este de 60° .

- a) $13N$ b) $\sqrt{41}N$ c) $\sqrt{111}N$
d) $15N$ e) $\sqrt{113 + 56\sqrt{3}}N$ f) $14N$

TG 51 În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P și Q împart latură (BC) în trei părți egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , să se calculeze lungimea vectorului $\vec{GP} + \vec{GQ}$.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 2 d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $2\sqrt{3}$ f) $3\sqrt{3}$

TG 52 În sistemul cartezian de axe de coordonate se consideră punctele $O(0,0)$, $A(6,0)$, $B(6,4)$ și M mijlocul segmentului $[AB]$. Dacă $\vec{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$, atunci $a + b$ este:

- a) 8 b) 10 c) 4 d) 7 e) 9 f) 6

TG 53 În pătratul $ABCD$ cu latura de 6, punctele M și N aparțin laturii (BC) astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{NC} = \frac{1}{2}$. Să se calculeze lungimea vectorului $\vec{AM} + \vec{AN}$.

- a) 12 b) $4\sqrt{10}$ c) $\frac{25}{2}$ d) 13 e) $8\sqrt{3}$ f) $9\sqrt{2}$

TG 54 Se consideră vectorii $\overrightarrow{PA} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{PB} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$, respectiv $\overrightarrow{PC} = \vec{i} + a\vec{j}$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui a pentru care punctele A, B, C sunt coliniare.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\frac{5}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) 1 f) 3

TG 55 Fie M mijlocul laturii $[BC]$ a triunghiului ABC . Pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ fie respectiv punctele D și E astfel ca $AB = 3 \cdot AD$ și $AC = 2 \cdot AE$, iar $\{F\} = AM \cap DE$. Să se determine valoarea parametrului real k pentru care

$$k \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) -1 f) 4

TG 56 Fie G centrul de greutate al triunghiului neechilateral ABC , iar H ortocentrul său. Valoarea parametrului real k pentru care are loc egalitatea

$$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = k \cdot \overrightarrow{HG}$$

este:

- a) 1 b) 2 c) 5 d) 3 e) -1 f) -3.

TG 57 Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC , știind că $M(1, 1)$, $N(5, -1)$, $P(3, 5)$ sunt mijloacele laturilor sale.

- a) $4\sqrt{5}$ b) $12\sqrt{5}$ c) $8\sqrt{5} + 4\sqrt{10}$
d) 30 e) $8\sqrt{5} + 12$ f) $6\sqrt{5} + 14$

TG 58 Fie triunghiul ABC cu $A(1, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(5, -1)$ și dreapta d de ecuație $x - y - 2 = 0$. Atunci:

- a) $A \in d$ b) $d \perp BC$ c) $d \cap [AB] = \emptyset$
 d) d este bisectoarea unghiului ABC e) $d \parallel BC$
 f) niciunul dintre răspunsurile anterioare nu este adevărat.

TG 59 Fie punctele $A(1, 1)$, $B(2, \frac{1}{2})$, $C(-1, -4)$, $D(\frac{5}{2}, 3)$, $P(a, b)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $a \cdot b$ știind că punctele A, B, P , respectiv C, D, P sunt coliniare.

- a) $\frac{28}{25}$ b) $\frac{10}{9}$ c) $\frac{21}{16}$ d) $\frac{11}{10}$ e) 1 f) 2

TG 60 Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei dusă din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $m + n$.

- a) 6 b) 4 c) -6 d) -4 e) 3 f) -3

TG 61 Punctul $P(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$, situat pe cercul trigonometric, se rotește în sens trigonometric în jurul originii cu 90° . Fie (a, b) coordonatele sale după rotire. Să se calculeze $\log_4 \left| \frac{a}{b} \right|$.

- a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4} - \log_2 3$ c) $\log_2 3 - \frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\log_4 3$ f) $\log_2 3$

TG 62 Se dă triunghiul ABC cu $A(-1, 3)$, $B(-2, -4)$, $C(2, 6)$. Să se calculeze distanța de la punctul $O(0, 0)$ la punctul de intersecție dintre dreapta suport a medianei din A cu dreapta suport a înălțimii din B .

- a) $2\sqrt{65}$ b) $\sqrt{218}$ c) $3\sqrt{34}$ d) 16 e) $8\sqrt{5}$ f) $8\sqrt{6}$

TG 63 Pornind din punctul A de coordonate $(6, -1)$, un punct mobil notat P se îndepărtează cu viteză constantă de acesta, echidistant față de dreapta $d : x + 2y + 2 = 0$, traversând primul cadran. Să se calculeze distanța parcursă de P între cele două axe de coordonate.

- a) $\frac{9}{2}$ b) $2\sqrt{5}$ c) 4 d) $\frac{\sqrt{89}}{2}$ e) $3\sqrt{2}$ f) $2\sqrt{6}$

TG 64 Fie $P(a, b)$ punctul egal depărtat de punctele $A(2, 2 + \sqrt{3})$, $B(-1, 2)$, $C(0, -2 - \sqrt{3})$. Atunci $a + b$ este egal cu:

- a) 2 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{3}{2}$.

TG 65 Se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-3, -4)$, $D(4, 3)$. Pe dreapta CD se alege punctul P astfel ca $m(\widehat{APC}) = m(\widehat{BPD})$. Să se calculeze distanța de la P la originea sistemului de axe de coordonate.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{8}{5}$ c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ f) $\frac{5}{3}$

TG 66 Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele $d_1 : 3x + 4y - 10 = 0$ și $d_2 : y = mx + 5$, unde $m \in \mathbb{R}$.

- a) 1 b) $\frac{3}{2}$ c) 2 d) $\frac{5}{2}$ e) 3 f) $2\sqrt{2}$

TG 67 Punctul $C(a, b)$ aparține segmentului $[AB]$ astfel ca $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$. Să se calculeze $a - b$, știind că $A(0, 4)$ și $B(4, 0)$.

- a) $\frac{3}{4}$ b) $4\sqrt{5} - 8$ c) $\frac{4}{3}$ d) 1 e) $2\sqrt{2} - 2$ f) $2\sqrt{5} - 4$

TG 68 Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $DA \perp AB$, $AB = 6$, $AD = CD = 3$. Dacă M este mijlocul lui (AB) și $N \in (DC)$ cu $CN = 1$, la ce distanță de A se intersectează dreptele MN și BC ?

- a) $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $\frac{24}{5}$ e) $\frac{47}{10}$ f) 5

TG 69 Prin simetricul punctului $A(-2, 3)$ față de punctul $B(1, 2)$ se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Să se calculeze distanța de la punctul A la dreapta d .

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{2}$ d) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ e) $4\sqrt{2}$ f) 5

TG 70 Fiecărui număr natural n i se asociază punctul P_n de coordonate $\left(\cos \frac{n\pi}{3}, \sin \frac{n\pi}{3}\right)$. Câte drepte ce conțin cel puțin două din punctele considerate pot fi construite?

- a) 3 b) 6 c) 15 d) 30 e) 45 f) o infinitate

TG 71 Fie $O(0, 0)$, $A(-1, 4)$, $B(5, 1)$. Să se afle coordonatele punctului C astfel ca simetricul lui față de dreapta AB să fie centrul de greutate al triunghiului AOB .

- a) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ b) $(2, 3)$ c) $\left(\frac{11}{5}, \frac{18}{5}\right)$
d) $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ f) $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

TG 72 Un punct din primul cadran situat pe o dreaptă d se numește *bine plasat* dacă distanța de la el la origine este un număr natural. Câte puncte *bine plasate* conține dreapta $d : 2x + y - 4\sqrt{2} = 0$?

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

TG 73 Fie P punctul egal depărtat de laturile triunghiului ABC , unde $A(1, 1)$, $B(4, 5)$ și $C(5, 4)$. Să se calculeze distanța de la P la dreapta AB .

- a) $\frac{4}{7}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{10 + \sqrt{2}}{7}$ d) $\frac{10 + \sqrt{2}}{14}$ e) $\frac{10 - \sqrt{2}}{14}$ f) $\frac{2}{3}$

TG 74 Fie punctele O , A , B , C astfel încât $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, unde $O(0, 0)$, $A(4, 1)$, $B(1, 2)$. Prin C se duce o dreaptă ce face unghiul θ cu Ox , unde $\cos \theta = \frac{1}{3}$, ce intersectează dreapta OA în punctul D . Să se calculeze aria triunghiului OCD .

- a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{1099 - 98\sqrt{2}}{254}$ c) $\frac{10\sqrt{2} - 7}{2}$
d) $\frac{10\sqrt{2} - 3}{4}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{13}{2}$

TG 75 Fie $A(2, 0)$, $B(0, 4)$ și $C(5, a)$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB . Dacă $O(x_o, y_o)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , să se determine $x_o - y_o$.

- a) -1 b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{4}{5}$ e) 1 f) 0

TG 76 Fie punctele $A(1, 3)$, $B(3, 5)$ și $C(c, c)$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Dacă $\{P\} = CA \cap Ox$, $\{Q\} = CB \cap Oy$, să se determine coeficientul unghiular al dreptei PQ .

- a) 1 b) 2 c) $-\frac{9}{2}$ d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) c

TG 77 Fie $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ și fie $C(a, b)$ pe dreapta $x + y = 8$ astfel încât triunghiul ABC este isoscel de bază AB . Dacă $H(x_0, y_0)$ este ortocentrul triunghiului ABC , să se determine $x_0 + y_0$.

- a) $\frac{24}{5}$ b) $\frac{16}{7}$ c) $\frac{17}{3}$ d) $\frac{12}{5}$ e) 6 f) 4

TG 78 Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecția lui A pe dreapta de ecuație $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparține dreptei:

- a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
 d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$ f) $y = x + 1$.

TG 79 Pe laturile AB, BC, CA ale triunghiului de vârfuri $A(4, 0), B(3, 0)$ și $C(1, 4)$, se consideră respectiv punctele M, N, P astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = 3, \quad \frac{NB}{NC} = 2, \quad \frac{PC}{PA} = \frac{1}{6}.$$

Să se studieze dacă dreptele AN, BP și CM sunt concurente și în caz afirmativ să se găsească coordonatele punctului de concurență.

- a) nu sunt concurente b) $\left(\frac{19}{10}, \frac{12}{5}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$
 d) $\left(\frac{10}{7}, \frac{24}{7}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ f) $\left(2, \frac{10}{3}\right)$

TG 80 Pe laturile AB și BC ale triunghiului de vârfuri $A(3, 0), B(0, 4)$ și $C(2, 5)$ se consideră respectiv punctele M , și N astfel încât

$$\frac{MA}{MB} = a, \quad \frac{NB}{NC} = b, \quad a, b > 0.$$

Pentru ce valori ale lui a și b distanțele de la punctul I , de intersecție a dreptelor AN și CM , la cele trei laturi ale triunghiului ABC sunt egale între ele?

- a) $a = 2\sqrt{5}, b = 1$ b) $a = \frac{\sqrt{130}}{5}, b = \frac{5\sqrt{26}}{26}$ c) $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}, b = 1$
 d) $a = 2, b = 2$ e) $a = \frac{\sqrt{5}}{2}, b = 2$ f) $a = \sqrt{5}, b = 1$

TG 81 Simetrica dreptei $d : y = 2 - x$ față de punctul $A(2, -3)$ intersectează axele de coordonate în punctele P și Q . Să se calculeze aria triunghiului POQ .

- a) 8 b) 16 c) 6 d) 4 e) 10 f) 9

TG 82 Se consideră punctele $A(1, 0)$ și $C(3, 1)$. Dacă (AC) este o diagonală a pătratului $ABCD$, să se afle coordonatele vârfurilor B și D .

- a) $\left(\frac{12}{5}, -\frac{3}{5}\right), \left(\frac{7}{5}, \frac{7}{5}\right)$ b) $\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 d) $\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ e) $\left(\frac{13}{5}, -\frac{11}{20}\right), \left(\frac{8}{5}, \frac{29}{20}\right)$ f) $(2, -1), (1, 1)$

TG 83 Se consideră dreptele concurente $d_1 : x + 2y - 9 = 0$, $d_2 : x - 2y + 3 = 0$ și $d_3 : 2x + ay - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$. O dreaptă d ce trece prin punctul $O(0, 0)$ intersectează dreptele d_1, d_2, d_3 respectiv în punctele distincte A, B, C . Să se afle panta dreptei d astfel ca $(AB) \equiv (BC)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $-\frac{1}{2}; 1$ d) $-\frac{11}{2}$ e) -1 f) $-\frac{11}{2}; 1$

TG 84 Se dau punctele $A(4, 0)$ și $B(0, 2)$. Fie M, N proiecțiile punctului P , mijlocul segmentului (AB) , pe Ox , respectiv Oy . Dacă Q este punctul de intersecție al perpendicularei în B pe dreapta AB cu dreapta MP , iar R punctul de intersecție al perpendicularei în A pe AB cu dreapta NP , să se calculeze aria patrulaterului $ABQR$.

- a) $\frac{25}{2}$ b) $\frac{23}{2}$ c) 10 d) $\frac{5}{2}$ e) 25 f) 27

TG 85 Prin punctul A de intersecție al dreptelor

$$d_1 : x + y - 2 = 0 \quad \text{și} \quad d_2 : 2x - y - 4 = 0$$

se duce o dreaptă d paralelă cu prima bisectoare. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se arate că raportul distanțelor de la P la d_1 , respectiv la d_2 este constant și să se determine valoarea lui.

- a) $\frac{10}{3}$ b) 3 c) $\frac{13}{4}$ d) $\sqrt{10}$ e) $2\sqrt{5}$ f) $2\sqrt{3}$

TG 86 Mulțimea punctelor $P(x, y)$ aflate la distanța r de punctul $Q(a, b)$ formează cercul de centru Q și rază r . Să se determine ecuația ce descrie acest cerc.

- a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ b) $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay - r^2 = 0$
 c) $(x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$ d) $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
 e) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r$ f) $x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

TG 87 Se consideră punctele $A(3, 0)$ și $B(0, 4)$. Fie punctul Q situat în interiorul triunghiului OAB aflat la distanța r de fiecare latură a acestuia. Să se determine care din următoarele ecuații este verificată de toate punctele $P(x, y)$ ce se află la distanța r de punctul Q .

- a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - x - y - \frac{1}{2} = 0$
 c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 3 = 0$ d) $x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0$
 e) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$ f) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

TG 88 Dintre toate punctele $P(x, y)$ ce verifică ecuația $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 4$, să se determine cel mai apropiat de $O(0, 0)$.

- a) $\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$ b) $\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right)$ c) $\left(\frac{8}{3}, 2\right)$
 d) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ e) $(2, 1)$ f) $(3, 2)$

TG 89 Să se determine $m \in (0, \sqrt{10})$ pentru care există punctele N și P situate în primul cadran astfel încât $ON = OP = \sqrt{10}$ și $MNPQ$ este pătrat, unde $M(m, 0)$ și $Q(0, m)$.

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) 1 c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ d) $\sqrt{2}$ e) 2 f) $\sqrt{5}$

PROBLEME DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

(simbol AM)

AM 1 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$.

- a) 10 b) -9 c) 1 d) -1 e) 11 f) 9

AM 2 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2 - \ln(x^2 + 1)}{x^2}$.

- a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 3 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^x - 2^x}{2^x - 4}$.

- a) -1 b) 1 c) $\ln 2$ d) $\frac{1}{\ln 2}$ e) $\ln \sqrt{2}$ f) e

AM 4 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{12x} + 1)}{\ln(1 + e^{3x})}$.

- a) 4 b) 3 c) 12 d) e^3 e) $+\infty$ f) 1

AM 5 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sqrt{\operatorname{tg} x}}{2 - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) $\frac{1}{8}$ f) $-\frac{1}{2}$

AM 6 Să se calculeze limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + \pi}{x - \pi} \right)^x$.

- a) $e^{2\pi}$ b) e^2 c) e^π d) π^2 e) π f) e

AM 7 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^x$.

- a) 0 b) 1 c) e d) $\frac{1}{e}$ e) e^2 f) -1

AM 8 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1) - \cos x + e^{x^2}}{10x^2}$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{5}{4}$

AM 9 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$. Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) $-\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) -1 e) 1 f) nu există

AM 10 Utilizând, eventual, identitatea

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a - b}{2} \cos \frac{a + b}{2},$$

să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}).$$

- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 0 d) 1 e) 2 f) $\frac{1}{2}$

AM 11 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) $+\infty$ c) π d) $\sqrt{\pi}$ e) 0 f) nu există

AM 12 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \left(e^{\frac{1}{x^2+1}} - e^{\frac{1}{x^2}} \right)$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) 2 e) nu există f) $2e$

AM 13 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{x}{4} \right]}{x}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 4 c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) nu există f) 2

AM 14 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1))$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) $+\infty$ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) -1 f) nu există

AM 15 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})\sqrt{x}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $+\infty$ d) nu există e) 1 f) 2

AM 16 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4 + 1}{x^2 + 2} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2} \right)$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) 2 d) e e) 3 f) nu există

AM 17 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x^3}{6} - \sin x \right)$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) -1 b) $-\frac{1}{6}$ c) 0 d) nu există e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 18 Să se determine valoarea parametrului real a pentru care

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(e^x + a) - x)(e^x + x) = 1.$$

- a) e^{-1} b) 0 c) 1 d) e e) -1 f) $-e$

AM 19 Să se determine mulțimea tuturor valorilor posibile ale parametrului $a \geq 0$ pentru care limita

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{x^a}$$

există și este un număr real nenul.

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{3\}$ d) $(2, +\infty)$ e) $(0, 2)$ f) $\{0, 3\}$

AM 20 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x.$$

- a) e b) e^3 c) e^{-2} d) e^2 e) 1 f) $+\infty$

AM 21 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{e}$ d) e e) e^2 f) $\frac{1}{e^2}$

AM 22 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) nu există c) 1 d) $+\infty$ e) 3 f) 2

AM 23 Fie funcția $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})^2$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a lui x . Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) nu există d) -1 e) 2 f) $\frac{3}{2}$

AM 24 Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$. Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) 0 c) -1 d) $\frac{1}{2}$ e) $+\infty$ f) nu există

AM 25 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^{\operatorname{tg} x}$.

- a) 0 b) 1 c) -1 d) $+\infty$ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM 26 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x - 1}.$$

- a) 0 b) 1 c) $n(n+1)$
 d) $\frac{n(n+1)}{2}$ e) $n+1$ f) n

AM 27 Să se determine parametrul real $a > 0$ astfel încât

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32.$$

- a) 0 b) 2 c) 4 d) 1 e) 16 f) 8

AM 28 Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{11^x - \cos x}{11x}$.

- a) $\ln 11$ b) $\ln \sqrt[11]{11}$ c) $\ln \sqrt{11}$ d) $\ln 11^{11}$ e) $\ln 11^2$ f) $\ln \frac{11}{2}$

AM 29 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9^x - 1}{|x|}$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 1 b) -1 c) 0 d) $\ln 9$ e) $-\ln 9$ f) nu există

AM 30 Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-2x} \sin(x^2 + 1))$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 2 b) 0 c) 1 d) -1 e) -2 f) nu există

AM 31 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n - (\cos x + \cos^2 x + \cdots + \cos^n x)}{\sin^2 x}.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{n(n+1)}{2}$ d) $+\infty$ e) $\frac{n}{2}$ f) $\frac{n(n+1)}{4}$

AM 32 Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$, știind că

$$\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{\sin x}{2\pi - x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2ax)}{x^2} = 0.$$

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\sqrt{2}$ c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\pm\sqrt{2}$ f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

AM 33 Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} (26 - 5x)^{\frac{1}{x-5}}.$

- a) 1 b) e^{-5} c) 0 d) e e) e^5 f) e^{-1}

AM 34 Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin $f(x) = (1 + x^2)^{-\frac{1}{x}}$. Să se calculeze media aritmetică a următoarelor trei limite:

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{și} \quad l_3 = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

- a) 3 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{4}{3}$ e) 1 f) $\frac{1}{6}$

AM 35 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[\frac{1}{\ln x} \right],$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x , iar în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) $-\infty$ d) -1 e) $+\infty$ f) nu există

AM 36 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}{\sin x - x \cos x}.$$

- a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) 2 e) 4 f) -1

AM 37 Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

- a) $+\infty$ b) $\frac{1}{e}$ c) 1 d) 0 e) e f) -1

AM 38 Fie $a > 0$ fixat. Să se calculeze

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

- a) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{2}a}$ e) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ f) $\frac{1}{2a}$

AM 39 Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x^3 + 3x]}{[x]^3 + 3[x]},$$

unde $[x]$ este partea întreagă a lui x , și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 2 c) 1 d) $+\infty$ e) $\frac{1}{4}$ f) nu există

AM 40 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^{2018}) - \ln^{2018}(1 + x)}{x^{2019}}.$$

- a) 2018 b) 0 c) 1 d) 1009 e) 2017 f) 1010

AM 41 Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se studieze existența limitei

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n - \sin^n(x)}{x^{n+2}}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{n}{6}$ d) n e) $\frac{n}{2}$ f) nu există

AM 42 Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(nx)} \cdot \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \cos(kx), \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) 0 b) $\frac{n+1}{n}$ c) 1 d) $\frac{2n+1}{n}$ e) $\frac{2n+1}{2n}$ f) $\frac{n}{2n+1}$

AM 43 Fie $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție cu proprietatea că $f(x^2 + x) \leq x$, pentru orice $x \geq 0$. Dacă

$$L = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x)}{\sqrt{x}},$$

atunci:

- a) $L = \infty$ b) $L = 1$ c) $L = \frac{1}{2}$ d) $L = 0$ e) $L = \frac{1}{3}$ f) $L = 2$

AM 44 Se consideră funcția $h : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}},$$

unde a_1, a_2, \dots, a_n sunt numere naturale nenule și diferite de 1, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se studieze existența limitei $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ și în cazul în care aceasta există să se determine valoarea sa.

- a) 0 b) $+\infty$ c) 1 d) nu există e) $a_1 a_2 \cdots a_n$ f) $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$

AM 45 Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x.$$

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $y = 0$ | b) $y = \frac{1}{2}$ | c) $y = 2x - \frac{1}{2}$ |
| d) $y = -2x - \frac{1}{2}$ | e) $y = -2x + \frac{1}{2}$ | f) $y = 2x + \frac{1}{2}$ |

AM 46 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------|---------------------------------|
| a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ | b) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$ | c) $y = \pm \frac{\pi}{2}x + 1$ |
| d) $y = \pm \frac{\pi}{2}x - 1$ | e) nu există | f) $y = \frac{\pi}{2}x$ |

AM 47 Să se studieze existența asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x \ln(e^x + 1)}$$

și în cazul în care aceasta există să se determine ecuația sa.

- | | | |
|---|--------------------|---|
| a) $y = x + \frac{1}{2}$ | b) $y = \sqrt{2}x$ | c) $y = x + 1$ |
| d) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}$ | e) nu există | f) $y = \sqrt{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$ |

AM 48 Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \ln x$$

și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|------------------------|----------------|-----------------------|
| a) $y = x$ | b) $y = x + 1$ | c) $y = 0$ |
| d) nu există asimptote | e) $x = 0$ | f) $x = 0$ și $y = 0$ |

AM 49 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$. Să se studieze existența asimptotelor la graficul funcției f și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|----------------|------------|--------------|
| a) $y = 0$ | b) $y = x$ | c) nu există |
| d) $y = x + 1$ | e) $x = 0$ | f) $y = 2x$ |

AM 50 Fie funcția $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}.$$

Să se determine ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f .

- | | | |
|-------------|------------|----------------------------------|
| a) $y = 0$ | b) $y = 2$ | c) $y = 1$ |
| d) $y = 2x$ | e) $y = x$ | f) toate răspunsurile sunt false |

AM 51 Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^{ax}}{x+1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului a astfel încât $y = 0$ să fie asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

- | | | |
|-------------------|-------------------|-----------------|
| a) $(0, +\infty)$ | b) $\{1\}$ | c) $(-1, 2)$ |
| d) \emptyset | e) $[0, +\infty)$ | f) \mathbb{R} |

AM 52 Se consideră $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x-2}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine toate valorile parametrilor reali a, b astfel încât $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .

- a) $a = 0, b = -2$ b) $a = 1, b = 0$ c) $a = 0, \forall b \in \mathbb{R}$
 d) $a = 0, b = 3$ e) $a = -2, \forall b \in \mathbb{R}$ f) $a = 0, b = 0$

AM 53 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$. Să se determine toate asimptotele la graficul funcției f .

- a) $x = 0$ este asimptotă verticală
 b) $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$
 c) $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$
 d) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 e) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 f) $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$

AM 54 Se consideră $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \arctg x, & \text{dacă } x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{x}, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

Să se determine ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .

- a) $y = 0$ b) $y = x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}$
 d) $y = -\frac{\pi}{2}x$ e) $y = -\frac{\pi}{4}$ f) $y = 2\pi x$

AM 55 Să se determine asimptotele la graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$$

- a) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
 b) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta

- c) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm \infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga
- d) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $\pm \infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta
- e) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga
- f) $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$
 $x = 0$ este asimptotă verticală la stânga

AM 56 Fie $a > 0$ și funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{e^x - a},$$

unde $D \subset \mathbb{R}$ reprezintă domeniul maxim de definiție. Știind că funcția f nu are asimptote verticale, să se studieze existența altor asimptote la graficul funcției f și în cazul în care acestea există să se determine ecuațiile lor.

- | | | |
|-----------------------|-------------------|---------------------|
| a) $y = 0, y = -x$ | b) $y = 0$ | c) $y = 0, y = x$ |
| d) $y = 0, y = x + 1$ | e) $y = 1, y = x$ | f) nu are asimptote |

AM 57 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2^x - x^2}{x - 2}$, unde prin D s-a notat domeniul maxim de definiție. Să se determine ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

- | | | |
|--------------------|------------------------|--------------------|
| a) $x + y + 2 = 0$ | b) $y = x - 2$ | c) $x = 2$ |
| d) $y = 2 - x$ | e) $x = 2, y = -x - 2$ | f) $y = \pm x + 2$ |

AM 58 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{3} \left[\frac{2}{x} \right], & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0, \end{cases}$$

unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui $x \in \mathbb{R}$. Să se determine valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

- a) 0 b) $-\frac{2}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) 2 f) $\frac{1}{3}$

AM 59 Se consideră funcția $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ \frac{a \sin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}, & \text{dacă } x \in (1, \pi]. \end{cases}$$

Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă pe $[0, \pi]$.

- a) $2e^3$ b) $-3e^2$ c) e d) $3e^3$ e) $-3e^3$ f) 0

AM 60 Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{\pi}{x}, & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ 0, & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Să se precizeze care dintre răspunsurile de mai jos este corect.

- a) f este continuă pe $[0, 1]$
 b) f este discontinuă în punctul $x = 0$
 c) f este discontinuă în punctul $x = \frac{1}{2}$
 d) f are limită nenulă în punctul $x = 0$
 e) f este discontinuă în punctul $x = 1$
 f) f nu admite limită în punctul $x = 0$

AM 61 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcției¹

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right) \setminus \{\pi\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right|$$

în punctul π . În caz afirmativ, să se precizeze și expresia funcției prelunge \tilde{f} .

- a) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$
- b) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ 1, & x = \pi \end{cases}$
- c) f nu este prelungibilă prin continuitate în $x = \pi$
- d) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$
- e) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \pi \\ \frac{1}{2}, & x = \pi \end{cases}$
- f) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

AM 62 Să se studieze posibilitatea prelungirii prin continuitate a funcției

$$f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin(3 \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}}$$

în punctele $a = -1$ și $b = 1$. În caz afirmativ, să se precizeze și expresia funcției prelunge \tilde{f} .

¹Fie $f : (a, c) \cup (c, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe fiecare din intervalele (a, c) și (c, b) . Dacă $l = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ există și este finită atunci $\tilde{f} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $\tilde{f}(x) = f(x)$ pentru $x \neq c$ și $\tilde{f}(c) = l$ este o funcție continuă, numită prelungirea prin continuitate a lui f .

a) f nu este prelungibilă prin continuitate la $[-1, 1]$

b) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} 3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x = 1 \end{cases}$

c) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ -3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

d) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3\pi, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

e) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} -3, & x = -1 \\ f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

f) f se prelungește prin continuitate la $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-1, 1) \\ 3, & x \in \{-1, 1\} \end{cases}$

AM 63 Fie funcția continuă $f : [1, 100) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a + \{x\})(b - \{x\})$, $a, b \in \mathbb{R}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x . Dacă $\text{Im} f = [m, M]$, să se determine $M - m$.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $a^2 + a$ d) ab e) $\frac{a^2 + b^2}{2}$ f) $\frac{(a + b)^2}{4}$

AM 64 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă în punctul $x = 0$ astfel încât $f(0) = 0$. Dacă $f(x) - f\left(\frac{x}{3}\right) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(5x)}{\sin(f(x))}.$$

a) 0 b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $+\infty$ e) 1 f) $\frac{10}{3}$

AM 65 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$$f(2017) = 2016 \text{ și } f(x)f(f(x)) = 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $f(2015)$.

- a) 1 b) 2015 c) 2017 d) $\frac{1}{2017}$ e) $\frac{1}{2015}$ f) 2016

AM 66 Se consideră funcțiile $f, g : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \in (0, 1) \\ x + 1, & \text{dacă } x \in [1, e) \end{cases}, \text{ respectiv } g(x) = \frac{f(\ln(x+1))}{\ln(1+f(x))}.$$

Dacă notăm cu

$$A = \{x \in (0, e) : g \text{ este discontinuă în } x\} \text{ și } S = \sum_{a \in A} a,$$

să se determine S .

- a) 1 b) $1 + e$ c) $1 - e$ d) $e - 1$ e) 0 f) e

AM 67 Fie $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = |x^2 - 4x| \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}},$$

unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f . Să se determine mulțimea punctelor de continuitate ale funcției f .

- a) $[1, 4)$ b) $[1, 4]$ c) $(0, \infty)$ d) $[1, \infty)$ e) $(1, \infty)$ f) $[1, \infty) \setminus \{4\}$

AM 68 Se consideră funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \arcsin \frac{|x|}{1 + |x|},$$

unde D este domeniul maxim de definiție. Să se determine mulțimea C a punctelor de continuitate ale lui f , respectiv mulțimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale lui f .

- a) $C = D_1 = (0, \infty)$ b) $C = [0, \infty)$, $D_1 = (0, \infty)$
 c) $C = D_1 = \mathbb{R}$ d) $C = D_1 = \mathbb{R}^*$
 e) $C = \mathbb{R}$, $D_1 = \mathbb{R}^*$ f) $C = [-1, 1]$, $D_1 = (-1, 1)$

AM 69 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + \ln x, & \text{dacă } x > 1 \\ x^2, & \text{dacă } x \leq 1. \end{cases}$$

Care din următoarele afirmații este adevărată?

- a) f este continuă și derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 b) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă doar pe $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
 c) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $2f(1) = f'(1)$
 d) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $f(1) = f'(1)$
 e) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $f(1) = 2f'(1)$
 f) f este continuă pe \mathbb{R} și derivabilă pe \mathbb{R} cu $f(1) = -f'(1)$

AM 70 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}.$$

Să se studieze derivabilitatea funcției în punctul $x_0 = 1$ și în caz afirmativ să se calculeze $f'(1)$.

- a) f este derivabilă și $f'(1) = \frac{1}{e}$ b) f este derivabilă și $f'(1) = -\frac{1}{e}$
 c) f este derivabilă și $f'(1) = 0$ d) f nu este derivabilă în $x_0 = 1$
 e) f este derivabilă și $f'(1) = e$ f) f este derivabilă și $f'(1) = -e$

AM 71 Se consideră funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

- a) f este derivabilă și $f'(0) = -1$ b) f este derivabilă și $f'(0) = 1$
 c) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$ d) f este derivabilă și $f'(0) = 0$
 e) f este derivabilă și $f'(0) = 2$ f) f este derivabilă și $f'(0) = \frac{1}{2}$

AM 72 Să se determine parametrii reali a, b astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & \text{dacă } x \leq 2 \\ ax + b, & \text{dacă } x > 2 \end{cases}$$

să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

- a) $a = 4, \quad b = 0$ b) $a = 3, \quad b = 0$ c) $a \in \mathbb{R}, \quad b = 5$
 d) $a = 3, \quad b \in \mathbb{R}$ e) $a = 4, \quad b = 1$ f) $a = -1, \quad b = 4$

AM 73 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x(a \sin x + b \cos x), & \text{dacă } x < 0 \\ x\sqrt{x^2 + 1}, & \text{dacă } x \geq 0. \end{cases}$$

Determinați parametrii reali a, b astfel încât funcția f să fie derivabilă pe \mathbb{R} .

- a) $a = 1, \forall b \in \mathbb{R}$ b) $a = b = 0$ c) $\forall a \in \mathbb{R}, b = 0$
 d) $a = 1, b = 0$ e) $a = b = 1$ f) nu există $a, b \in \mathbb{R}$.

AM 74 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Să se determine mulțimea D_1 a punctelor de derivabilitate ale funcției f .

- a) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (1, 2)$ b) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ c) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 d) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e) $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$ f) $D_1 = \mathbb{R} \setminus (-2, -1)$

AM 75 Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Determinați domeniul maxim de definiție D și domeniul de derivabilitate D_1 .

- a) $D = D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ b) $D = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$
 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- c) $D = D_1 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$ d) $D = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$
 $D_1 = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- e) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ f) $D = D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

AM 76 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \min \{x^4, x^5, x^6, x^7\}$. Dacă notăm

$$A = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ nu este derivabilă în } x\},$$

atunci $S = \sum_{x \in A} x^2$ este:

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 0 e) 4 f) 5

AM 77 Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = (x^2 + 1)^{x^2+1}$.

- a) $2x(x^2 + 1)^{x^2+1} [\ln(x^2 + 1) + 1]$ b) $2x(x^2 + 1)^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$
- c) $x(x^2 + 1)^{x^2+1} [\ln(x^2 + 1) + 1]$ d) $2x [\ln(x^2 + 1) + 1]$
- e) $2x(x^2 + 1) [\ln(x^2 + 1) + 1]$ f) $x(x^2 + 1)^{x^2+1} \ln(x^2 + 1)$

AM 78 Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sqrt{x^2+e}}$ în punctul $x_0 = 0$.

- a) e b) $2e$ c) $e^{\sqrt{e}}$ d) 0 e) \sqrt{e} f) 1

AM 79 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1 - x^2) + \sqrt{x^2 + 1}$. Să se calculeze derivata funcției f în $x_0 = 1$.

- a) $\frac{4 + \sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2} - 2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2} - 4}{2}$
 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2}$ f) $-2 + \sqrt{2}$

AM 80 Să se calculeze derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \pi^2 + \ln \left[\left(\sqrt{x^{10} + 2x^2 + 4} \right)^{2^{-1}} \right]$$

în punctul $x_0 = -1$.

- a) 2 b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{7}{2}$ d) $-\frac{7}{2}$ e) $\frac{1}{2}$ f) -2

AM 81 Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2x^2}}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

să fie continuă. În cazul în care există, să se calculeze $f'(0)$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) nu există f) $\sqrt{2}$

AM 82 Legea de mișcare a unui mobil pe o axă este exprimată prin relația $s(t) = e^{-t} \cos t$ (timpul este măsurat în secunde). Să se determine accelerația mobilului după 2 secunde.

- a) $e^{-2} \cos 2$ b) $2e^{-2} \cos 2$ c) $2e^{-2} \sin 2$
 d) $e^{-2} \sin 2$ e) $\frac{e^{-2} \sin 2}{2}$ f) $\frac{e^{-2} \cos 2}{2}$

AM 83 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln x$. Să se studieze dacă f este inversabilă și în caz afirmativ să se calculeze limita

$$L = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-y} f^{-1}(y).$$

- a) f este inversabilă și $L = +\infty$ b) f este inversabilă și $L = 0$
 c) f este inversabilă și $L = 1$ d) f este inversabilă și $L = e$
 e) f este inversabilă și $L = e^{-1}$ f) f nu este inversabilă

AM 84 Fie funcția $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = \frac{x}{e^x}$ și funcțiile $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $f_2(x)$.

- a) 0 b) xe^{-x} c) xe^{-2x}
 d) $(x-1)e^x$ e) $(2x-3)e^{-x}$ f) $(x-2)e^{-x}$

AM 85 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-2|\ln x|}$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât funcția $g : (0, 1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^2 f''(x) + mx f'(x)}{f(x)}$$

să fie constantă.

- a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) 0 d) 4 e) 1 f) -1

AM 86 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{|x| - 1}{|x| + 1} \ln \frac{x^2 + 1}{|x| + 1}.$$

Să se calculeze

$$\left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f'(x) \right) \cdot \left(\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f'(x) \right).$$

- a) 1 b) 0 c) -1 d) 2 e) $+\infty$ f) $-\infty$

AM 87 Se consideră funcția $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}.$$

Să se calculeze $f'(x)$, pentru $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) $f'(x) = \frac{x}{2}$ b) $f'(x) = \frac{1}{x + \pi}$ c) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x + \pi}}$
d) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e) $f'(x) = \frac{1}{2}$ f) $f'(x) = 1$

AM 88 Derivata funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{|x|}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

în punctul $x_0 = 0$ este:

- a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) e e) 1 f) nu există

AM 89 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = |x^2 + |x^2 - x| - 1|.$$

Notăm cu M mulțimea punctelor în care f nu este derivabilă și $S = \sum_{x \in M} f'_s(x)$, unde $f'_s(x)$ reprezintă derivata la stânga a funcției f în punctul x . Să se determine S .

- a) -3 b) 0 c) 1 d) -1 e) 3 f) $\frac{1}{2}$

AM 90 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă cu proprietățile:

$$f(x + y) - f(x) - f(y) = 5xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 2.$$

Să se determine $f(0)$ și $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- a) $f(0) = 1, f'(x) = 5x$ b) $f(0) = 0, f'(x) = 5x$
 c) $f(0) = 2, f'(x) = 2x + 5$ d) $f(0) = 1, f'(x) = 5x + 2$
 e) $f(0) = 0, f'(x) = 5x + 2$ f) $f(0) = 0, f'(x) = 2x + 2$

AM 91 Fie $a > 0$ și funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x + a) \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Să se determine mulțimea valorilor lui a astfel încât f să fie convexă.

- a) $(0, \infty)$ b) $[1, \infty)$ c) $\left[\frac{1}{2}, \infty \right)$ d) \emptyset e) $\left\{ \frac{1}{2} \right\}$ f) $\left[\frac{1}{2}, 1 \right)$

AM 92 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & \text{dacă } x \neq 1 \\ 1, & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

În cazul în care există, să se determine $f'(1)$.

- a) $-\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) nu există f) 3

AM 93 Fie funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + x - 1$. În cazul în care există, să se determine $(f^{-1})'(0)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 1 d) nu există e) 2 f) $-\frac{1}{2}$

AM 94 Să se determine toate funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care satisfac relația $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = ae^x, a \in \mathbb{R}$ b) $f(x) = \sin x$ c) $f(x) = \ln(1+x)$
 d) $f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$ e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ f) nu există astfel de funcții

AM 95 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x + 2012 - 2013 \sqrt[2013]{x}$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

- a) $y = x - 1$ b) $y = x + 1$ c) $y = x$
 d) $y = 0$ e) $y = 1$ f) $y = 2$

AM 96 Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x$$

în punctul de pe grafic în care panta tangentei este minimă.

- a) $y = -\frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ b) $y = \frac{5}{2}x + \frac{11}{2}$ c) $y = 3$
 d) $y = x + 2$ e) $y = 2x + 1$ f) $y = -2x + 1$

AM 97 Să se determine punctele de pe graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$$

în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație $2x - 9y = 0$.

- a) $(1, 0)$ b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \ln 2\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3} - \ln 2\right)$
 d) $\left(2, \ln 2 - \frac{2}{3}\right)$ e) $\left(2, \ln 2 - \frac{1}{3}\right)$ f) $(1, 1)$

AM 98 Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

a) $y = 7x - 11$

b) $y = 7x$

c) $y = 11x - 7$

d) $7y = x - 11$

e) $7y = x + 11$

f) $y = 7x - 4$

AM 99 Pentru ce valori ale parametrului $a \in \mathbb{R}$, dreapta $y = ax - 2$ este tangentă la curba $y = x^3 + 4x$?

a) 1

b) -1

c) 7

d) 2

e) -2

f) 0

AM 100 Se consideră funcția $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Să se determine abscisa punctului situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic este paralelă cu coarda care unește punctele de pe grafic de abscise $x = 0$, $x = 3$.

a) $\frac{1}{3}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{5}{4}$

e) $\frac{3}{4}$

f) $\frac{4}{3}$

AM 101 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

a) $y = x - 1$

b) $y = x + 1$

c) $y = -x$

d) $y = -x + 2$

e) $y = x$

f) $y = x + 2$

AM 102 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine coordonatele punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la grafic are panta egală cu $\frac{1}{2}$.

- a) $(1, 1)$ b) $(0, 1)$ c) $(1, 0)$
 d) $(2, 0)$ e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$

AM 103 Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} \ln x$. Să se determine punctele de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .

- a) $A(1, 0)$ b) $A(e, \sqrt{e})$ c) $A(e^{-2}, -2)$
 d) $A(e^{-2}, -2e^{-1})$ e) $A(1, -2e^{-1})$ f) $A(e^2, 2e)$

AM 104 Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. Să se determine mulțimea punctelor de inflexiune ale lui f .

- a) $\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ b) $\left\{0, -\frac{1}{2}\right\}$ c) \emptyset
 d) $\{-1\}$ e) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ f) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

AM 105 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^{|x-1|}},$$

și mulțimile A și B ale absciselor punctelor unghiulare, respectiv de inflexiune ale funcției f . Să se calculeze $\alpha + \beta$, unde

$$\alpha = \sum_{a \in A} a^2 \text{ și } \beta = \sum_{b \in B} b^2.$$

- a) 20 b) 10 c) 19 d) 18 e) 1 f) 22

AM 106 Să se precizeze numărul punctelor unghiulare ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{\ln(x^2 + 1)}.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) 5

AM 107 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Să se determine numărul punctelor de inflexiune ale funcției f .

- a) 1 b) 2 c) 0 d) 3 e) 4 f) 5

AM 108 Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 - \ln x$, $a \in \mathbb{R}^*$. Să se stabilească numărul punctelor de inflexiune ale lui f .

- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) depinde de valoarea lui a f) 4

AM 109 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1\}$ b) $\{0, 1\}$ c) $\{1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1, 2\}$ f) \emptyset

AM 110 Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcției f precizând și natura acestora.

- a) $(e, 2e)$, minim local b) $\left(e, \frac{1}{2e}\right)$, maxim local
c) $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$, maxim local d) $(\sqrt{e}, 2e)$, minim local
e) $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e}\right)$, minim local f) $\left(\frac{1}{e}, 2e\right)$, minim local

AM 111 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$, unde D este domeniul maxim de definiție al funcției f .

- a) $\{0, 6\}$ b) $\{3\}$ c) \emptyset d) $\{0\}$ e) $\{6\}$ f) $\{1, 6\}$

AM 112 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât $x_0 = 1$ să fie punct de extrem local al funcției f .

- a) 1 b) 2 c) -2 d) -1 e) 3 f) -3

AM 113 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$ f) \emptyset

AM 114 Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$. Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ b) $\{0\}$ c) $\{1\}$
d) $\{0, 1\}$ e) $\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ f) \emptyset

AM 115 Să se determine mulțimea punctelor de extrem local pentru funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 7) .$$

- a) $\{2, 4 \pm \sqrt{5}\}$ b) $\{4, 2 \pm \sqrt{5}\}$ c) $\{2\}$
d) $\{4\}$ e) $\{4, 4 \pm \sqrt{5}\}$ f) $\{2, 2 \pm \sqrt{5}\}$

AM 116 Funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - \ln x$ are:

- a) un punct de minim local
- b) un punct de maxim local
- c) două puncte de maxim local
- d) două puncte de minim local
- e) un punct de minim local și un punct de maxim local
- f) nu are puncte de extrem local

AM 117 Se consideră punctele $A(-1, 0)$ și $B(3, 0)$. Dacă C este un punct variabil pe graficul funcției $f : (0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-x}$, să se calculeze valoarea maximă pe care o poate lua aria triunghiului ABC .

- a) 1
- b) 2
- c) $\frac{1}{e}$
- d) $\frac{2}{e}$
- e) $\frac{4}{e}$
- f) $\frac{12}{e^3}$

AM 118 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca funcția f să aibă două puncte de extrem local.

- a) $\{-1\}$
- b) $(-1, 1)$
- c) $(-\infty, -1)$
- d) $(1, \infty)$
- e) $(0, 1)$
- f) \mathbb{R}^*

AM 119 Se consideră funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x}{2+x}.$$

Să se determine punctele de extrem local ale graficului funcției f precizând și natura acestora.

- a) $(-1, e)$, maxim local b) $\left(1, \frac{e}{3}\right)$, minim local
 c) $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$, maxim local d) $\left(1, \frac{e}{3}\right)$, maxim local
 e) $\left(-1, \frac{1}{e}\right)$, minim local f) $(1, e)$, maxim local

AM 120 Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = 3\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $4\sqrt{3}$ f) 0

AM 121 Să se determine punctul de minim al funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x} - 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

- a) 2 b) 1 c) 0 d) π e) $\frac{\pi}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

AM 122 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x b^{1-x} + b^x a^{1-x}$, cu $a, b > 0$, $a \neq b$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Atunci:

- a) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f
 b) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de minim local al graficului funcției f
 c) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ nu este punct de extrem al graficului funcției f
 d) $\left(\frac{1}{2}, 2ab\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f
 e) $\left(\frac{1}{2}, 2\sqrt{ab}\right)$ este punct de minim local al graficului funcției f
 f) $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{ab}\right)$ este punct de maxim local al graficului funcției f

AM 123 Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \frac{e^{|\ln x|}}{x+1}.$$

Să se determine numărul punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) 0 b) 2 c) 3 d) 1 e) 4 f) 5

AM 124 Să se determine abscisa punctului de pe graficul funcției

$$f : (-2, 0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x},$$

situat cel mai aproape de prima bisectoare.

- a) $-\sqrt{2}$ b) -1 c) $-\frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ f) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 125 Fie A punctul aparținând graficului funcției

$$f : \left[-\frac{1}{2}, \infty\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

situat cel mai aproape de originea O a sistemului de coordonate carteziene xOy . Să se afle distanța de la O la A .

- a) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{36}$ e) $\frac{\sqrt{21}}{18}$ f) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

AM 126 Un camion trebuie să parcurgă 100 km cu o viteză constantă $v \text{ km/h}$ (cu condiția $40 \leq v \leq 70$) consumând $\left(8 + \frac{v^2}{300}\right) \text{ litri/h}$ de benzină. Să se determine viteza pentru care costul este minim, știind că șoferul este plătit cu 15 lei/h și benzina costă 6 lei/litru .

- a) 50 km/h b) 55 km/h c) $15\sqrt{14} \text{ km/h}$
d) $16\sqrt{14} \text{ km/h}$ e) 70 km/h f) $14\sqrt{14} \text{ km/h}$

AM 127 Să se determine dintre toate numerele reale pozitive pe cel pentru care diferența dintre acesta și cubul său să fie maximă.

- a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ f) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

AM 128 Să se determine mulțimea soluțiilor inecuației

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x \leq 0.$$

- a) $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ b) $(-\infty, 0]$ c) $[0, \infty)$
d) $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ e) \mathbb{R} f) \mathbb{Z}

AM 129 Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$. Soluția inecuației $f(x) - 1 > 0$ este:

- a) $(0, +\infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ d) $(1, +\infty)$ e) $(-\infty, -1)$ f) \emptyset

AM 130 Să se determine cel mai mare număr real a cu proprietatea

$$x^2 + 1 \geq a + 2 \ln x, \text{ pentru orice } x \in (0, \infty).$$

- a) 0 b) 2 c) 1 d) -1 e) 4 f) 3

AM 131 Să se determine mulțimea valorilor parametrului $m \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$x + e^x \geq mx + 1, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

- a) $\{1\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 2\}$ e) $\{0, 1\}$ f) \emptyset

AM 132 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real m astfel ca ecuația $e^x = mx^2$ să aibă trei rădăcini reale distincte.

- a) $(-\infty, 0]$ b) $\{1\}$ c) $\left(0, \frac{e^2}{8}\right)$
d) $\left(\frac{e^2}{8}, \frac{e^2}{4}\right)$ e) $\left(\frac{e^2}{4}, \infty\right)$ f) $\left\{\frac{e^2}{4}\right\}$

AM 133 Să se determine mulțimea tuturor numerelor reale x care verifică inegalitatea:

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} \geq 0.$$

- a) $(0, \infty)$ b) $(-\infty, 0)$ c) $[0, \infty)$ d) \mathbb{R} e) $[1, \infty)$ f) \emptyset

AM 134 Să se rezolve inecuația $e^{13x} + 13e^{-x} \geq 14$.

- a) \emptyset b) $\{0\}$ c) $[0, \infty)$ d) $(-\infty, 0]$ e) \mathbb{R} f) $\{1\}$

AM 135 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x+3}, & \text{dacă } x \neq -3 \\ 0, & \text{dacă } x = -3. \end{cases}$$

Să se studieze monotonia funcției f .

- a) f este crescătoare pe \mathbb{R} b) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
c) f este crescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ d) f este descrescătoare pe $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$
e) f este descrescătoare pe \mathbb{R} f) f nu este monotonă pe \mathbb{R}

AM 136 Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}.$$

Să se determine imaginea funcției f .

- a) $[0, 1]$ b) $[0, +\infty)$ c) \mathbb{R}
 d) $[0, 10]$ e) $[1, 4]$ f) $\left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right]$

AM 137 Se consideră funcțiile $f, g, h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad g(x) = x, \quad h(x) = \ln(1+x).$$

Care din următoarele afirmații este adevărată pentru orice $x \geq 0$?

- a) $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$ b) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ c) $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$
 d) $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ e) $f(x) > g(x) > h(x)$ f) $f(x) < g(x) < h(x)$

AM 138 Fie $f(t) = t^3 e^{-\frac{t}{5}}$ puterea emisă la descărcarea unui aparat electric la fiecare moment $t > 0$ (puterea este măsurată în wați și timpul în secunde). Să se determine la ce moment puterea va fi maximă.

- a) 3 b) 15 c) 5 d) 20 e) 15^2 f) 25

AM 139 Fie funcția $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

și afirmațiile:

- (i) f este continuă, dar nu este derivabilă;
 (ii) $x = 0$ este asimptotă verticală;
 (iii) $y = 0$ este asimptotă orizontală;
 (iv) $f'(0) = \frac{1}{2}$;
 (v) f este strict crescătoare;
 (vi) $\text{Im } f = \left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$.

Câte dintre afirmațiile date sunt adevărate?

- a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2 f) 1

AM 140 Fie funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (3x^2 - 6x) \sqrt[3]{x}$. Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată:

- a) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (6x - 6) \sqrt[3]{x}$
 b) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2) \sqrt[3]{x^2}$
 c) F nu este o funcție derivabilă pe \mathbb{R}
 d) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8) \sqrt[3]{x}$
 e) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (7x - 8) \sqrt[3]{x^2}$
 f) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 - 3x^2) \sqrt[3]{x}$

AM 141 Fie funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x|x - 1|$. Să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată:

- a) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \left| \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right|$
 b) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{2} |x - 1|$
 c) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 1|$
 d) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \left| \frac{x^2}{2} - x \right|$
 e) F nu poate fi primitivă a nici unei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 f) F este o primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + x$

AM 142 Să se studieze primitivabilitatea funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} a \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1 + a, & x = 0, \end{cases}$$

după parametrul real a .

- a) f este primitivabilă pentru $a > 1$
- b) f este primitivabilă pentru $a \in (-1, 1) \setminus \{0\}$
- c) f este primitivabilă dacă și numai dacă $a = 0$
- d) f este primitivabilă pentru $a \in \{-1, 1\}$
- e) f nu este primitivabilă pentru $\forall a \in \mathbb{R}$
- f) f este primitivabilă pentru $a < -1$

AM 143 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x + e^{-x}, & x < 0 \\ 1 + xe^x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{a) } \int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(2e^x + 1), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } \int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 + 1) - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(1 - e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{c) } \int f(x) dx = \emptyset \text{ deoarece } f \text{ nu este primitivabilă}$$

$$\text{d) } \int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 + 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ x + e^x, & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{e) } \int f(x) dx = \begin{cases} x^2 - 1 - e^{-x}, & x < 0 \\ (x - 1)(1 + e^x), & x \geq 0 \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } \int f(x) dx = \begin{cases} (x^2 - 2) - e^{-x}, & x \leq 0 \\ (x - 1)(e^x + 2), & x > 0 \end{cases} + \mathcal{C}$$

AM 144 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & x \in [-1, 0] \\ \sqrt{2-x}, & x \in (0, 2] \end{cases}.$$

$$\text{a) } \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}, & x \in [-1, 0] \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3}, & x \in (0, 2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } \int f(x) dx = \emptyset \text{ deoarece } f \text{ nu este primitivabilă}$$

$$\text{c) } \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, & x \in [-1, 0] \\ -\frac{\sqrt{2-x}}{2} + \frac{1}{2}, & x \in (0, 2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{d) } \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{2}{3}, & x \in [-1, 0] \\ -\frac{2}{3}\sqrt{(2-x)^3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}, & x \in (0, 2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{e) } \int f(x) dx = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, & x \in [-1, 0] \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2}, & x \in (0, 2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } \int f(x) dx = \begin{cases} \sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{2}, & x \in [-1, 0] \\ -\sqrt{(2-x)^3} + 1, & x \in (0, 2] \end{cases} + \mathcal{C}$$

AM 145 Să se determine valorile parametrilor reali a, b, c pentru care funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = ax + (bx^2 + c) \arctg x$ este o primitivă a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arctg x$.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a = -\frac{1}{2}, b = c = \frac{1}{2} & \text{b) } a = b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2} & \text{c) } a = b = c = -\frac{1}{2} \\ \text{d) } a = b = c = \frac{1}{2} & \text{e) } a = c = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} & \text{f) } a = b = c = 1 \end{array}$$

AM 146 Să se calculeze $\int (x^2 - x) e^{-2x} dx$.

- a) $(2x - 1) e^{-2x} + \mathcal{C}$ b) $\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ c) $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$
d) $(1 - 2x) e^{-2x} + \mathcal{C}$ e) $-\frac{x^2}{2} e^{-2x} + \mathcal{C}$ f) $\left(-\frac{2x^3}{3} + x^2\right) e^{-2x} + \mathcal{C}$

AM 147 Să se calculeze $\int (2x - 1) \cos 2x dx$.

- a) $x \sin 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$ b) $2x \cos 2x - (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
c) $x \sin 2x + 2 (\cos 2x + \sin 2x) + \mathcal{C}$ d) $\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) + \mathcal{C}$
e) $x \cos 2x + (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} (\sin 2x - \cos 2x) + \mathcal{C}$

AM 148 Fie $I(a) = \int \frac{e^x}{x^a} dx$, $x \in (0, +\infty)$, unde a este un număr natural nenul. Care dintre următoarele afirmații este adevărată?

- a) $I(3) = \frac{e^x}{2x^2} - \frac{1}{2} I(1)$ b) $3I(3) = \frac{e^x}{x^2} - I(1)$
c) $I(3) = -\frac{e^x}{2x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} I(1)$ d) $2I(3) = \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{3} I(2)$
e) $I(3) = \frac{e^x}{3x^2} - \frac{2}{3} I(2)$ f) $I(3) = \frac{e^x}{3x^3} - \frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{3} I(2)$

AM 149 Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

- a) $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{1}{7}$ b) $a = \frac{4}{17}, b = -\frac{4}{17}$ c) $a = -\frac{1}{17}, b = \frac{4}{17}$
 d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7}, b = \frac{4}{7}$ f) $a = b = \frac{1}{17}$

AM 150 Să se calculeze $\int x^5 e^{3x} dx$.

- a) $\frac{1}{25} e^{3x} (81x^5 + 135x^4 - 180x^3 + 120x - 40) + \mathcal{C}$
 b) $\frac{1}{81} e^{3x} (81x^5 - 135x^4 - 180x^3 + 120x + 40) + \mathcal{C}$
 c) $\frac{1}{243} e^{3x} (81x^5 - 135x^4 + 180x^3 - 180x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$
 d) $\frac{1}{243} e^{3x} (81x^5 + 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$
 e) $\frac{1}{243} e^{3x} (81x^5 - 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x - 40) + \mathcal{C}$
 f) $\frac{2}{243} e^{3x} (81x^5 - 180x^4 - 180x^3 + 135x^2 + 120x + 40) + \mathcal{C}$

AM 151 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-6x+5}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

- a) $\frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$ b) $\frac{11}{4} \ln(5-x) - \frac{3}{4} \ln(1-x) + \mathcal{C}$
 c) $\frac{11}{4} \ln \frac{x-5}{x-1} + \mathcal{C}$ d) $\frac{3}{4} \ln \frac{1-x}{|x-5|} + \mathcal{C}$
 e) $\frac{7}{4} \ln|x-1| - \frac{3}{4} \ln(5-x) + \mathcal{C}$ f) $\frac{11}{4} \ln(1-x) - \frac{7}{4} \ln|x-5| + \mathcal{C}$

AM 152 Să se determine familia primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + b}{a^2x^2 + b^2}, \quad a > 0, \quad b \in \mathbb{R}^*.$$

a) $F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

b) $F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

c) $F(x) = \frac{1}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{a}{b} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

d) $F(x) = \frac{b}{a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

e) $F(x) = \frac{1}{a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

f) $F(x) = \frac{b}{2a} \ln(a^2x^2 + b^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{ax}{b} + \mathcal{C}$

AM 153 Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x - 8 - x^2}{x^4 + 4x^3}.$$

Să se determine acea primitivă F a funcției f care verifică relația $F(5) = \frac{4}{25}$.

a) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{8}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x^3}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

c) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x^2}{x+1} + \frac{8}{5} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

d) $\ln \sqrt{\frac{x+4}{x}} - \frac{x-1}{x^2} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

e) $\ln \sqrt{\frac{x}{x+4}} + \frac{x-1}{x^2} + \frac{6}{25} - \ln \frac{3\sqrt{3}}{5}$

f) $\ln \sqrt{\frac{x}{\sqrt{x+4}}} - \frac{x-1}{x^2} + \frac{1}{25} - \ln \frac{3\sqrt{5}}{5}$

AM 154 Să se determine mulțimea primitivelor funcției

$$f(x) = \frac{1}{x^{2018} + x}$$

pe intervalul $I \subset (0, \infty)$.

$$\text{a) } \ln x - \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } \ln x + \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$$

$$\text{c) } \ln x + \ln(1+x^{2017}) \cdot 2017 + \mathcal{C}$$

$$\text{d) } \ln x - \frac{\ln(x+x^{2018})}{2018} + \mathcal{C}$$

$$\text{e) } -\ln x + \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } \frac{\ln x}{2018} - \frac{\ln(1+x^{2017})}{2017} + \mathcal{C}$$

AM 155 Fie $I \subset (-\infty, 1)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+5}}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

$$\text{a) } 11 \ln |2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}| + 3\sqrt{x^2-6x+5} + \mathcal{C}$$

$$\text{b) } \frac{11}{3} \ln \frac{6-2x+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}} + \mathcal{C}$$

$$\text{c) } 7 \ln |2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}| + 2\sqrt{x^2-6x+5} + \mathcal{C}$$

$$\text{d) } \frac{7}{2} \ln \frac{|2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}|}{\sqrt{x^2-6x+5}} + \mathcal{C}$$

$$\text{e) } 2 \ln |2x-6+2\sqrt{x^2-6x+5}| + 11\sqrt{x^2-6x+5} + \mathcal{C}$$

$$\text{f) } \frac{3}{7} \ln \frac{6-2x+2\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{x^2-6x+5}} + \mathcal{C}$$

AM 156 Fie $I \subset (0, \infty)$ un interval și funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

Să se calculeze $\int f(x) dx$.

- a) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- b) $3\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- c) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- d) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- e) $2\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} - 3\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$
- f) $3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - \sqrt[6]{x} - \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + \mathcal{C}$

AM 157 Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}.$$

Să se determine familia primitivelor funcției f .

- a) $\frac{12}{13}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{13}} - \frac{18}{5}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{36}{7}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} - 3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + \mathcal{C}$
- b) $\frac{1}{13}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{1}{10}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + \mathcal{C}$
- c) $\frac{1}{13}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{13}} - \frac{1}{10}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{1}{7}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} - \frac{1}{4}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + \mathcal{C}$
- d) $\frac{11}{13}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{9}{10}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{6}{7}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + \mathcal{C}$
- e) $\frac{4}{13}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{2}{5}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{4}{7}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} + \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + \mathcal{C}$
- f) $\frac{13}{4}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{13}} + \frac{5}{2}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^{10}} + \frac{7}{4}\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^7} + \sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^4} + \mathcal{C}$

AM 158 Să se calculeze

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} + 1} dx, \quad x > \frac{1}{2}.$$

- a) $\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[4]{2x-1} + 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$

- b) $-\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$
- c) $\sqrt{2x-1} - 2\sqrt[4]{2x-1} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[4]{2x-1} + 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$
- d) $\sqrt{2x-1} - 2\sqrt[4]{2x-1} + \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[4]{2x-1} + 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$
- e) $-\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[4]{2x-1} + 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$
- f) $\sqrt{2x-1} - 2\sqrt[4]{2x-1} - \frac{4\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[4]{2x-1} + 1}{\sqrt{3}} + \mathcal{C}$

AM 159 Se consideră funcția

$$f(x) = x^5 \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^2}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se determine familia primitivelor funcției f .

- a) $\frac{1}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^3}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
- b) $\frac{3}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
- c) $\frac{1}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} - \frac{a^2}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^3} + \mathcal{C}$
- d) $\frac{1}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
- e) $\frac{1}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{a^2}{3} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$
- f) $\frac{5}{8} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^8} - \frac{3a^2}{5} \sqrt[3]{(a^3 + x^3)^5} + \mathcal{C}$

AM 160 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{2 - e^x}{e^x + e^{2-x}}.$$

$$\text{a) } \frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^{x-1} - \ln(e^{2x} + e^2) + \mathcal{C}$$

b) $2\operatorname{arctg}e^{x-1} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + e^2) + \mathcal{C}$

c) $\frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^{x-1} - \frac{1}{2} \ln(e^{2(x-1)} + 1) + \mathcal{C}$

$$\text{d) } \frac{1}{e} \operatorname{arctge}^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2(x-1)} + 1) + \mathcal{C}$$

e) $2\operatorname{arctg}e^{x-1} - \frac{1}{2}\ln(e^{2x} + e^2) + \mathcal{C}$

f) $\frac{2}{e} \operatorname{arctg} e^x - \ln(e^{2(x-1)} + 1) + \mathcal{C}$

AM 161 Fie funcțiile² :

$$\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{și respectiv} \quad \operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Să se determine primitiva F a funcției $f(x) = \operatorname{ch}^2 x \cdot \operatorname{sh}^2 x$ care verifică relația $F(0) = 0$.

$$\text{a) } \frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} - \frac{x}{8}$$

b) $-\frac{x}{16} + \frac{1}{32} \operatorname{sh} 4x$

$$\text{c) } \frac{e^{4x}}{64} - \frac{e^{-4x}}{64} + 2x$$

d) $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \operatorname{ch} x$

$$\text{e) } \frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{3x}{4} - \frac{1}{8}$$

f) $\frac{e^{4x}}{64} + \frac{e^{-4x}}{64} + \frac{e^{2x}}{16} + \frac{e^{-2x}}{16} - \frac{5}{32}$

AM 162 Se definește funcția³

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Să se determine mulțimea primitivelor funcției th și să se precizeze domeniul maxim D pe care sunt definite acestea.

²Funcția ch se numește *cosinus hiperbolic* iar funcția sh se numește *sinus hiperbolic*

³Funcția th se numește *tangenta hiperbolică*

- a) $\ln(e^x - e^{-x}) + \mathcal{C}$ și $D = (0, \infty)$ b) $\frac{1}{2} \ln(e^x + e^{-x}) + \mathcal{C}$ și $D = \mathbb{R}$
- c) $\frac{1}{e^x + e^{-x}} + \mathcal{C}$ și $D = \mathbb{R}$ d) $-x + \ln(1 + e^{2x}) + \mathcal{C}$ și $D = \mathbb{R}$
- e) $-x + \ln(1 - e^{2x}) + \mathcal{C}$ și $D = (0, \infty)$ f) $\frac{2}{e^x - e^{-x}} + \mathcal{C}$ și $D = (0, \infty)$

AM 163 Să se determine familia primitivelor funcției

$$f : \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

- a) $\ln \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$ b) $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \mathcal{C}$ c) $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \mathcal{C}$
- d) $\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} + \mathcal{C}$ e) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + \mathcal{C}$ f) $\ln \left| \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right| + \mathcal{C}$

AM 164 Să se determine familia primitivelor funcției

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 1}$$

pe intervalul $I = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$.

- a) $F(x) = \frac{x}{2} + \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$ b) $F(x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$
- c) $F(x) = 2x + \ln \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} + \mathcal{C}$ d) $F(x) = x^2 + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$
- e) $F(x) = x + \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$ f) $F(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} \right| + \mathcal{C}$

AM 165 Să se determine mulțimea primitivelor funcției $f : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sqrt{2(1 - \cos x)}.$$

a) f nu admite primitive

$$\text{b) } F(x) = \begin{cases} -4 \cos x + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4 \cos x + a + 4, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{c) } F(x) = \begin{cases} -4 \cos \frac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4 \cos \frac{x}{2} + a + 8, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{d) } F(x) = \begin{cases} -4 \sin \frac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ 4 \sin \frac{x}{2} + a, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{e) } F(x) = \begin{cases} 4 \sin \frac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ -4 \sin \frac{x}{2} + a + 8, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{f) } F(x) = \begin{cases} 4 \cos \frac{x}{2} + a, & x \in [0, 2\pi] \\ -4 \cos \frac{x}{2} + a, & x \in (2\pi, 4\pi], \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

AM 166 Ce relație trebuie să existe între constantele reale strict pozitive a și b astfel încât funcția

$$f(x) = \frac{1}{a + b \cdot \cos x}$$

să fie primitivabilă pe \mathbb{R} ?

a) $a > b$

b) $a \neq \frac{1}{b}$

c) $a \geq b$

d) $a \neq 0$

e) $a \neq 0, b \neq 0$

f) $b \neq 0$

AM 167 Pentru orice $b \in \mathbb{N}$ se definesc integralele

$$I(b) = \int \frac{1}{x^b \sqrt{a^2 + x^2}} dx, \quad x \in (0, \infty), \quad a \in \mathbb{R}^*.$$

Care din următoarele relații este adevărată?

$$\begin{array}{ll}
\text{a) } I(9) = \frac{1}{8a^2} \left(-7I(7) - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right) & \text{b) } I(9) = \frac{1}{9a^2} \left(-8I(7) - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right) \\
\text{c) } I(9) = \frac{1}{9a^2} \left(8I(7) - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right) & \text{d) } I(9) = \frac{1}{7a^2} \left(8I(7) - \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} \right) \\
\text{e) } I(9) = \frac{1}{9a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} - 8I(7) \right) & \text{f) } I(9) = \frac{1}{8a^2} \left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^8} - 7I(7) \right)
\end{array}$$

AM 168 Fie integralele

$$I(c) = \int \frac{x^c}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad c \in \mathbb{N}.$$

Să se exprime $I(2017)$ sub forma $I(2017) = a x^{2016} \sqrt{1+x^2} + b I(2015)$, $a, b \in \mathbb{R}$ și să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată.

- | | |
|-----------------------|--|
| a) $a = b$ | b) $a - b = 1$ |
| c) $a \cdot b = 2016$ | d) $a = 2017b$ |
| e) $a + b = -2015$ | f) $\nexists a, b \in \mathbb{R}$ care să verifice relația |

AM 169 Pentru $b \in \mathbb{N}$ se consideră integralele

$$I(b) = \int \frac{x^b}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad x \in (-a, a), \quad a > 0.$$

Să se determine o relație între $I(5)$ și $I(3)$.

- | | |
|--|--|
| a) $5I(5) = x^4 \sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2 I(3)$ | b) $5I(5) = -x^4 \sqrt{a^2 - x^2} + 4a^2 I(3)$ |
| c) $5I(5) = 4x^4 \sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2 I(3)$ | d) $I(5) = x^4 \sqrt{a^2 - x^2} - 2a^2 I(3)$ |
| e) $I(5) = 4x^4 \sqrt{a^2 - x^2} - 5a^2 I(3)$ | f) $4I(5) = x^4 \sqrt{a^2 - x^2} - 3a^2 I(3)$ |

AM 170 Să se calculeze

$$\int_1^e \frac{1 + 2 \ln x}{x(2 + \ln x)} dx.$$

a) $3 \ln 2 + 3 \ln 3 + 2$

b) $\ln \frac{9e^2}{32}$

c) $6 + \ln \frac{9}{8e}$

d) $2 \ln 2 + 3 \ln 3 + 1$

e) $\ln \frac{8e^2}{27}$

f) $4 - \ln \frac{3}{2e}$

AM 171 Să se calculeze

$$\int_0^1 e^{-3x} \cos \pi x dx.$$

a) $\frac{3(1 + e^{-3})}{9 + \pi^2}$

b) $\frac{2(1 + e^2)}{4 + \pi^2}$

c) $\frac{1 + e^{-3}}{9 + \pi^2}$

d) $\frac{1 + e^3}{4 + \pi^2}$

e) $\frac{2(1 + e^3)}{9 + \pi^2}$

f) $\frac{3(1 + e^{-3})}{4 + \pi^2}$

AM 172 Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x - x^3}{x^4 + 1} dx.$$

a) $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{8}$

b) $\frac{\pi}{8} - \frac{\ln 2}{4}$

c) $\pi - 2 \ln 2$

d) $2\pi - 4 \ln 2$

e) $\frac{\pi}{2} - \frac{\ln 2}{2}$

f) $\frac{\pi}{6} - \frac{\ln 2}{3}$

AM 173 Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4 + 4} dx.$$

a) $\frac{\operatorname{arctg} 3 - \ln 5}{8}$

b) $\frac{\operatorname{arctg} 2 - \ln 2}{4}$

c) $\frac{2\operatorname{arctg} 3 - \ln 2}{4}$

d) $\frac{2\operatorname{arctg} 2 - \ln 5}{8}$

e) $\frac{\operatorname{arctg} 4 - \ln 3}{8}$

f) $\frac{2\operatorname{arctg} 4 - \ln 3}{4}$

AM 174 Să se calculeze

$$\int_1^e (2x + 1) \ln x \, dx.$$

- a) $\frac{1}{2}(e + 3)$ b) $\frac{1}{3}(e^2 + 2)$ c) $\frac{1}{2}(e^2 + 3)$
 d) $\frac{1}{2}(e^2 - 2)$ e) $\frac{1}{3}(e - 3)$ f) $\frac{1}{3}(e^2 + 1)$

AM 175 Să se calculeze

$$\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^3}} \, dx.$$

- a) $\frac{40}{9}$ b) $\frac{10}{3}$ c) $\frac{50}{9}$ d) $\frac{20}{3}$ e) $\frac{10}{9}$ f) $\frac{40}{3}$

AM 176 Să se calculeze

$$\int_1^4 \frac{dx}{(4x-1)\sqrt{x}}.$$

- a) $\sqrt{5}$ b) $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$ c) $\ln \frac{9}{2}$ d) $\ln \frac{5}{2}$ e) $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$ f) $3\sqrt{5}$

AM 177 Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{3+x^2}, & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0, & |x| > \sqrt{3}, \end{cases} \quad a \in \mathbb{R}^*$$

și integrala $F(x) = \int_{-e}^x f(t) dt$. Să se calculeze $F(1) - F(0)$.

- a) 0 b) 1 c) $a\sqrt{3}$ d) $2a$ e) $2a\sqrt{3}$ f) $\frac{a\pi}{6\sqrt{3}}$

AM 178 Se consideră funcția ⁴ $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-a}^a x^2(\sigma(x) - \sigma(-x))dx, \quad a > 0.$$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{2a^3}{3}$ d) $\frac{a^3}{3}$ e) $2a$ f) $3a^3$

AM 179 Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + 3\sqrt{2x-5}} dx.$$

- a) $\ln \frac{3\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{3}{2} \ln 3 + 2 \ln 2$ c) $\frac{5}{2} \ln 3 - 4 \ln 2$
d) $\ln \frac{9}{4\sqrt{2}}$ e) $\frac{5}{2} \ln 3 - 3 \ln 2$ f) $\frac{3}{2} \ln 3 + 4 \ln 2$

AM 180 Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x-5}} dx.$$

- a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$ b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$
c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$ d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$
e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$ f) $\ln \frac{34}{5} - \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$

⁴funcția σ se numește *funcția treaptă unitate a lui Heaviside*

AM 181 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^1 |x| \arcsin x \, dx.$$

- a) $-\frac{\pi}{2}$ b) -1 c) 1 d) $\frac{\pi}{2}$ e) 0 f) π

AM 182 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-1}^1 |x| \arcsin^2 x \, dx.$$

- a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{\pi^2}{8}$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$ e) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}$ f) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$

AM 183 Să se determine valoarea parametrului $a > 0$ astfel încât integrala

$$\int_{-a}^a \frac{x^4}{1 + e^x} \, dx$$

să ia valoarea 20000.

- a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) e d) 1 e) 10 f) 100

AM 184 Fie integrala

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{b}{ae^t + b} \, dt.$$

Să se determine o relație între parametrii reali nenuli a, b astfel încât I să ia valoarea $\ln 32 - \ln 9$.

- a) $23a + 5b = 0$ b) $23a - 5b = 0$ c) $a \ln 3 = b \ln 4$
d) $a + b = \ln 12$ e) $42a - 11b = 0$ f) $a = b$

AM 185 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{1024} \frac{\ln(2017 - x)}{\ln[1505^2 - (512 - x)^2]} dx.$$

- a) 2017 b) $993 \cdot 2017$ c) $1024 \cdot 2017$
 d) 512 e) $\frac{993 \cdot 2017}{2}$ f) $993 \cdot 1024$

AM 186 Să se calculeze

$$\int_1^3 x[x]dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- a) $\frac{11}{2}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{13}{2}$ d) $\frac{13}{3}$ e) 4 f) 5

AM 187 Să se calculeze

$$\int_{-1}^3 x3^{[x]}dx,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

- a) $\frac{81}{4}$ b) $\frac{85}{3}$ c) $\frac{82}{3}$ d) $\frac{88}{3}$ e) $\frac{83}{4}$ f) $\frac{89}{4}$

AM 188 Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = [mx], \quad m > 0,$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a . Să se determine constanta m pentru care $\int_0^1 f(x)dx = \frac{3}{2}$.

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 2 e) 4 f) 8

AM 189 Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului $m \in [-2, 3]$ pentru care

$$\int_{-2}^3 (x + |m - x|) dx = 9.$$

a) $\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$

b) $\{0, 1\}$

c) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

d) $\left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

e) $\left\{-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

f) $\{-1, 3\}$

AM 190 Să se calculeze integrala

$$\int_0^{12} x \sqrt{14 - \sqrt{13^2 - x^2}} dx.$$

a) $\frac{2400}{49}$

b) $\frac{2536}{15}$

c) $\frac{2188}{15}$

d) $\frac{2195}{17}$

e) $\frac{2638}{49}$

f) $\frac{2600}{17}$

AM 191 Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [-3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x \leq 0, \\ 7x, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & -3 \leq x \leq -1, \\ 2x - 1, & x > -1 \end{cases}$$

și funcția $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h = f \circ g$. Să se calculeze integrala $\int_{-1}^1 h(x) dx$.

a) 1

b) $-\frac{29}{4}$

c) -4

d) $\frac{27}{4}$

e) $\frac{26}{3}$

f) $-\frac{29}{3}$

AM 192 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^1 (1 - |x|) dx.$$

a) 1

b) 2

c) $\frac{1}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) -2

f) 0

AM 193 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-2}^2 (1 - ||x| - 1|) dx.$$

- a) 0 b) 1 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) -1 f) $-\frac{1}{2}$

AM 194 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \min\{1, \operatorname{tg} x\} dx.$$

- a) $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{12}$ b) $\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{12}$ c) $\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{12}$
d) $\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{12}$ e) $\ln \sqrt{3} + \frac{\pi}{12}$ f) $\ln \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

AM 195 Să se calculeze

$$\int_{-2}^2 \min\{1, x, x^2\} dx.$$

- a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{2}{3}$ f) $-\frac{1}{3}$

AM 196 Să se calculeze

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \sin x, \frac{1}{2} \right\} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}$ b) $\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}$ c) $\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}$
d) $\frac{\pi + 6 - 3\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\pi + 3 + 3\sqrt{3}}{6}$ f) $\frac{2\pi}{3} + 1$

AM 197 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \min\{\sin x, \cos x\} dx.$$

- a) $\sqrt{2}$ b) $1 - \sqrt{2}$ c) 0 d) 2π e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

AM 198 Să se calculeze

$$\int_{-1}^1 \max\{1, 2^x\} dx.$$

- a) $\ln 2 + 1$ b) $\ln 2 - 1$ c) $1 - \frac{1}{\ln 2}$
d) $1 + \frac{1}{\ln 2}$ e) $-1 + \frac{1}{\ln 2}$ f) $\ln 2$

AM 199 Să se calculeze

$$\int_{-a}^a \max\left\{\left(\frac{1}{\pi}\right)^x, \pi^x\right\} dx, \quad a > 0.$$

- a) $2(\pi^a - 1)$ b) $2\pi^a$ c) $\frac{2(\pi^a - 1)}{\ln \pi}$ d) $\frac{2}{\ln \pi}$ e) $\frac{2a}{\ln \pi}$ f) 0

AM 200 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}$ c) $\frac{\pi}{4} + 1$
d) $\frac{\pi}{8} + 1$ e) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ f) $\frac{\pi - 1}{4}$

AM 201 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx.$$

- a) $\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{324}$ b) $\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 3}{648}$ c) $\frac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{648}$
 d) $\frac{\pi + 3}{648}$ e) $\frac{6\sqrt{3} - 3}{648}$ f) $\frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{324}$

AM 202 Se consideră funcția inversabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 7}.$$

Să se calculeze $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{8}{7}} f^{-1}(y) dy$, unde f^{-1} reprezintă inversa funcției f .

- a) $1 + \ln \frac{8}{7} - \frac{6\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$ b) $1 + \ln \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{7}}{6} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$
 c) $1 + \ln \frac{8}{7}$ d) $-1 - \ln \frac{8}{7} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{6}$
 e) $2 + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}$ f) 0

AM 203 Fie integrala

$$I(a) = \int_1^3 \frac{dx}{|x - a| + 1}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$.

- a) 0 b) ∞ c) 2 d) $\ln 3$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$

AM 204 Să se calculeze integrala

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx .$$

a) $\frac{\pi}{3} + \frac{9}{10} \ln \frac{9}{10}$

b) $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$

c) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{10} \ln \frac{9}{2}$

d) $\frac{2\pi}{5} + \frac{10}{3} \ln \frac{2}{9}$

e) $\frac{\pi}{4} + \frac{10}{7} \ln \frac{9}{2}$

f) $\frac{\pi}{5} + \frac{3}{4} \ln \frac{9}{2}$

AM 205 Să se calculeze

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{3 + \cos^2 x} dx.$$

a) $\frac{\pi^2}{4}$

b) $\frac{\pi}{4}$

c) $\frac{\pi^2}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{12}$

f) $\frac{\pi^2 \sqrt{3}}{18}$

AM 206 Se consideră funcțiile

$$f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \int_0^x t \sin 2t \, dt$$

și

$$f_2 : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} \, dt.$$

Să se calculeze $f_1(x) + f_2(x)$ pentru toate valorile lui x din intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) $x \arcsin x$

b) $x \arccos \sqrt{x}$

c) $x \arcsin \sqrt{x}$

d) $\frac{\pi}{4}$

e) $\frac{\pi}{2}$

f) $\frac{\pi}{6}$

AM 207 Să se determine constanta reală a pentru care valoarea integralei

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{a}{\sin x \cos x} dx$$

este $\ln \sqrt[4]{3}$.

a) 2

b) 1

c) π

d) $\sqrt{3}$

e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{3}$

AM 208 Se consideră integralele

$$C = \int_0^{\pi/4} \cos^4 x \, dx \quad \text{și} \quad S = \int_0^{\pi/4} \sin^4 x \, dx.$$

Să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată.

- a) $C + S = \frac{3\pi}{8}$ b) $C - S = \frac{\pi}{2}$ c) $C + S = \frac{\pi}{16}$
d) $C - S = 0$ e) $C + S = \frac{3\pi}{16}$ f) $C - S = \frac{3\pi}{4}$

AM 209 Să se determine valoarea integralei

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin x \, dx,$$

unde $f(x) = \max\{\sin x, \sin^3 x\}$.

- a) $\frac{9\pi}{16}$ b) $\frac{\pi}{12}$ c) $\frac{7\pi}{16}$ d) $\frac{\pi}{16}$ e) $\frac{3\pi}{16}$ f) 0

AM 210 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \, dx.$$

- a) $\frac{2\sqrt{3} + \pi}{6}$ b) $\frac{6\sqrt{3} - \pi}{2}$ c) $\frac{3\sqrt{3} + \pi}{6}$
d) $\frac{5\sqrt{3} - \pi}{3}$ e) $\frac{4\sqrt{3} - \pi}{6}$ f) $\frac{5\sqrt{3} + \pi}{2}$

AM 211 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \operatorname{sign} x \sin \frac{\pi x}{2} \, dx,$$

unde sign reprezintă funcția *semn*, $\operatorname{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

- a) 2 b) $\frac{2+2\sqrt{2}}{\pi}$ c) π d) $\frac{4-2\sqrt{2}}{\pi}$ e) $\frac{2}{\pi}$ f) 4π

AM 212 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 x \cos x \, dx.$$

- a) $\frac{13}{129}$ b) $\frac{31}{129}$ c) $\frac{13}{192}$ d) $\frac{31}{192}$ e) $\frac{27}{129}$ f) $\frac{71}{192}$

AM 213 Să se calculeze integrala definită

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 2x \sin 2x \, dx.$$

- a) 0 b) $-\frac{1}{10}$ c) $\frac{1}{10}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $-\frac{1}{5}$ f) 1

AM 214 Se consideră integralele definite

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \, dx, \quad \text{unde } a \in \mathbb{N}.$$

Să se calculeze produsul $aI(a)I(a-1)$ pentru toate valorile lui $a \in \mathbb{N}^*$.

- a) $\frac{\pi a}{2}$ b) $\frac{\pi}{2(a-1)!}$ c) π d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi a}{a-1}$ f) $\frac{\pi(a-1)}{2}$

AM 215 Fie integralele

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^a x \, dx, \quad \text{unde } a \in \mathbb{N}.$$

Să se precizeze care dintre următoarele relații este adevărată pentru $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$.

$$\begin{aligned} \text{a) } I(a) &= \frac{\pi}{2} - I(a-1) & \text{b) } I(a) &= \frac{a-1}{a} I(a-2) & \text{c) } I(a) &= \frac{1}{a+1} I(a-2) \\ \text{d) } I(a) &= \frac{a-1}{a} I(a-1) & \text{e) } I(a) &= \frac{\pi}{2} - I(a-2) & \text{f) } I(a) &= \frac{a}{a+1} I(a-2) \end{aligned}$$

AM 216 Fie

$$I(n) = \int_0^1 (2017 + x^n)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{I(n)}$.

$$\text{a) } 2017 \quad \text{b) } 2018 \quad \text{c) } 1 \quad \text{d) } \frac{\pi}{4} \quad \text{e) } \ln 2017 \quad \text{f) } \frac{1}{2017}$$

AM 217 Fie funcțiile f_1 și f_2 definite pe intervalul $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ prin expresiile

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x \sin \pi x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 10, & x = 0 \end{cases}, \quad \text{respectiv} \quad f_2(x) = \sqrt{\sin^2 \pi x}.$$

Dacă

$$I_1 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f_1(x) dx \quad \text{și} \quad I_2 = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} f_2(x) dx,$$

se cere să se precizeze care din următoarele afirmații este adevărată:

$$\begin{aligned} \text{a) } f_1 &> f_2 \text{ și } I_1 > I_2 & \text{b) } f_1 &= f_2 \text{ și } I_1 = I_2 & \text{c) } f_1 &= f_2 \text{ și } I_1 = I_2 \\ \text{d) } f_1 &\neq f_2 \text{ și } I_1 = I_2 & \text{e) } f_1 &\neq f_2 \text{ și } I_1 \neq I_2 & \text{f) } f_1 &< f_2 \text{ și } I_1 < I_2 \end{aligned}$$

AM 218 Fie $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ n (\operatorname{sign} x)^{n+1}, & |x| = 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

unde sign reprezintă funcția semn. Să se calculeze $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

- a) $\frac{1}{n}$ b) $\cos \frac{\pi}{n}$ c) $\frac{1 + (-1)^n}{n}$
 d) $\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n}$ e) $(-1)^n \cos \frac{\pi}{n}$ f) 0

AM 219 Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2} \frac{x}{1 + e^{-x}} dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x}{1 - e^{-x}} dx.$$

- a) $\ln 2 \ln 3$ b) $\ln 2 + 4 \ln 3$ c) $\ln 2 + \ln 3$
 d) $2 \ln 2 \ln 3$ e) $3 \ln 2 + 2 \ln 3$ f) $\ln 2 + 2 \ln 3$

AM 220 Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{tg}^5 x + \operatorname{tg}^7 x + \operatorname{tg}^9 x + \operatorname{tg}^{11} x) dx.$$

- a) $-\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{144}{5}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{11}{6}$ f) $\frac{155}{6}$

AM 221 Să se determine numărul real m pentru care are loc identitatea

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}} dx = m \int_1^2 (x - 1)^2 \sqrt{x} dx.$$

- a) 3, 5 b) 2 c) 3 d) 1, 5 e) 1 f) 2, 5

AM 222 Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2^n} \int_a^b \cos^n \left(x + \frac{\pi}{4} \right) dx$$

știind că intervalul de integrare $[a, b]$ este inclus în $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) $\sqrt{2}$ b) 0 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 2 e) ∞ f) $\frac{1}{2}$

AM 223 Să se calculeze limita

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x t^4 e^{-t} dt.$$

- a) $3!$ b) 8 c) $4!$ d) e^4 e) 16 f) e^2

AM 224 Se consideră integralele definite

$$I = \int_a^b \ln(x+1) dx \quad \text{și} \quad J = \int_a^b \frac{x}{x+1} dx,$$

unde a și b sunt numere reale cu proprietatea $0 < a < b$. Să se precizeze care dintre următoarele afirmații este adevărată.

- a) $I = J$ b) $I > J$ c) $J > I$
d) $I = 2J$ e) $I = \frac{a}{b-a} J$ f) $J = \frac{a}{a+b} I$

AM 225 Să se determine mulțimea soluțiilor reale ale ecuației

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 13 = 24 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 t dt.$$

- a) \emptyset b) $\{0, \pm\sqrt{2}\}$ c) $\{-1, 1\}$
d) $\left\{0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ e) $\left\{\pm 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ f) $\{1, -2 \pm \sqrt{2}\}$

AM 226 Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a)$, unde

$$I(a) = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{1}{x^2 + x + 1} dx, \quad \text{unde } a > 1.$$

- a) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ d) $\pi\sqrt{3}$ e) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ f) 1

AM 227 Să se calculeze

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) 2 c) $\sqrt{2}$ d) 4 e) ∞ f) $\frac{1}{4}$

AM 228 Să se calculeze valoarea limitei

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\int_0^{\cos x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{ctg} x} \ln(t^2 + 2) dt}.$$

- a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{\ln 2}$ d) $\frac{2}{\ln 2}$ e) 0 f) $\ln 2$

AM 229 Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funcția definită prin

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2 t} dt.$$

Să se precizeze care din afirmațiile următoare este adevărată.

- a) F este crescătoare b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$
 c) F este pară d) F este descrescătoare
 e) $F(1) = 0$ f) nici un răspuns nu este corect

AM 230 Să se determine aria subgraficului funcției $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+1}{x+3}.$$

- a) $\ln \frac{16}{9}$ b) $2 - \ln \frac{16}{9}$ c) $1 - \ln \frac{16}{9}$
 d) $\ln \frac{9}{16}$ e) $1 - \ln \frac{9}{16}$ f) 2

AM 231 Să se determine aria mulțimii mărginite cuprinse între

$$y = \frac{x^2 + 3}{x + 3} \quad \text{și} \quad y = 2.$$

- | | | |
|--------------------|-------------------|-------------------|
| a) $12 - 3 \ln 3$ | b) $12 + 3 \ln 3$ | c) $16 - 3 \ln 3$ |
| d) $16 - 12 \ln 3$ | e) $16 - \ln 12$ | f) $\ln 12$ |

AM 232 Să se calculeze aria domeniului mărginit ce este cuprins între parabolele $y = 2x^2 + 5x - 3$ și $y = 6 - x - x^2$.

- | | | | | | |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|
| a) 2^5 | b) 12 | c) 2^4 | d) 60 | e) 2^6 | f) 34 |
|----------|-------|----------|-------|----------|-------|

AM 233 Fie funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \int_0^\pi \frac{\sin t}{\sqrt{(x - \cos t)^2 + \sin^2 t}} dt.$$

Să se calculeze aria suprafeței limitate de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = a$, $a \leq -1$, respectiv $x = b$, $b \geq 1$.

- | | | |
|--------------------|------------------------|--|
| a) $a + b$ | b) $b - a$ | c) $\cos b - \cos a$ |
| d) $2 \ln abe^2 $ | e) $\ln a^2 + \ln b^2$ | f) $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a$ |

AM 234 Să se calculeze aria domeniului plan mărginit, delimitat de curbele de ecuații $y = 3 - x^2$, $y = 2x$.

- | | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|
| a) $\frac{32}{3}$ | b) $\frac{32}{5}$ | c) $\frac{16}{5}$ | d) $\frac{2}{15}$ | e) $\frac{1}{3}$ | f) $\frac{1}{5}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|------------------|------------------|

AM 235 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y = x^2 - 4x$ și dreapta $x - y = 4$.

- | | | | | | |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| a) $\frac{3}{2}$ | b) $\frac{4}{3}$ | c) $\frac{9}{2}$ | d) $\frac{3}{4}$ | e) $\frac{2}{9}$ | f) $\frac{2}{3}$ |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|

AM 236 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $y^2 = 10x$ și dreapta $y = 5x$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 237 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabolele $y = x^2$ și $y = 8 - x^2$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{16}{3}$ d) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{64}{3}$

AM 238 Să se determine aria domeniului mărginit, delimitat de parabola $x = y - y^2$ și dreapta $x + y = 0$.

- a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{1}{3}$ f) $\frac{1}{5}$

AM 239 Să se determine volumul corpului de rotație generat de graficul funcției $f : [0, 6] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[4]{7 - x^2 + 6x}$.

- a) $\pi \left(3\sqrt{3} + 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$ b) $\pi \left(3\sqrt{7} - 12 \arcsin \frac{1}{4} \right)$
c) $\pi \left(3\sqrt{7} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$ d) $\pi \left(\ln \frac{3}{4} + 16 \arcsin \frac{3}{4} \right)$
e) $\pi \left(3\sqrt{7} + \ln \frac{3}{4} \right)$ f) $\pi \left(7\sqrt{3} - 16 \arcsin \frac{5}{6} \right)$

AM 240 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $f : \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$.

- a) $\frac{4\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{2}$ b) $\frac{1}{16}\pi^2(3\pi^2 + 2)$ c) $\frac{\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{4}$
d) $\frac{9\pi^4}{16} - \frac{3\pi^2}{8}$ e) $\frac{3}{8}\pi^2(\pi^2 - 2)$ f) $\frac{8\pi^4}{9} - \frac{3\pi^2}{8}$

AM 241 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a cercului de ecuație $x^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$.

- a) 2π b) $2\pi^2$ c) π d) π^2 e) 4π f) $4\pi^2$

AM 242 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a elipsei de ecuație $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1 = 0$.

- a) 12π b) 10π c) 16π d) $12\pi^2$ e) $10\pi^2$ f) $16\pi^2$

AM 243 Să se determine parametrul m așa încât volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției

$$f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 2 \left(x - \frac{m}{x} \right)$$

în jurul axei Ox să fie egal cu volumul unei sfere de rază 1.

- a) 3 b) 2 c) -1 d) -2 e) 4 f) -3

AM 244 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

- a) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\pi \ln \frac{4}{\sqrt[3]{3}}$ c) $\frac{3\pi}{\sqrt[3]{4}}$
d) $\frac{4\pi}{\sqrt[3]{3}}$ e) $\pi \ln \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ f) $\pi \ln \frac{2}{\sqrt[3]{5}}$

AM 245 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $\pi \ln \frac{5}{13}$

b) $3\pi \ln \frac{13e}{5}$

c) $\pi \ln \frac{5}{13}$

d) $3\pi \ln \frac{5e}{13}$

e) $2\pi \ln \frac{13}{5e}$

f) $2\pi \ln \frac{5e}{13}$

AM 246 Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 x$.

a) $\frac{3\pi^2}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{3\pi}{16}$

d) $\frac{3\pi^2}{8}$

e) $\frac{3\pi^2}{16}$

f) $\frac{3\pi}{8}$

ANEXE

Subiectele date la admitere
în anii 2014, 2015, 2016, 2017,
2018 și 2019 cu rezolvările integrale

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2014**A**

1.(8p) Fie ecuația $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x+7} = 3$. Să se determine suma modulelor rădăcinilor ecuației.

- a) 1 b) 29 c) 36 d) 25 e) 37

2.(10p) Să se calculeze

$$E = \sum_{i=1}^{2014} \left[\left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i k!(k^2 + 1) \right].$$

- a) 2014! b) 2014! - 1 c) 2015! d) 2015! - 2 e) 2016! - 2

3.(8p) Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & \text{dacă } i = j, \\ (-1)^{i+j} C_j^i, & \text{dacă } i < j, \\ 0, & \text{dacă } i > j, \end{cases}$$

unde C_j^i reprezintă combinații de j luate câte i . Să se calculeze A^{-1} .

- a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.(7p) Se consideră grupul (\mathcal{M}, \cdot) , unde

$$\mathcal{M} = \left\{ A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{Z} \right\}$$

și " \cdot " este operația de înmulțire a matricelor. Să se determine simetricul elementului $A(2014)$.

a) $A(1)$ b) $A(0)$ c) $A(-2014)$ d) $A(-1)$ e) $A\left(\frac{1}{2014}\right)$

5.(9p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2014)(X - 2016) \text{ și } g = (X - 2015)^{2014} + X - 2001.$$

Să se determine restul împărțirii lui g la f .

a) $X + 2014$ b) $X - 2000$ c) $X - 2016$ d) $X - 2014$ e) $X + 2016$

6.(9p) Știind că $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ și $\sin a + \cos a = \frac{7}{5}$, să se afle $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$ e) $\sqrt{2} - 1$

7.(7p) Dreapta $d : 2x + y - 2 = 0$ intersectează axele de coordonate în punctele A și B . Să se determine coordonatele punctului C astfel ca punctul $G(3, 2)$ să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

a) $(8, 4)$ b) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ c) $(3, 5)$ d) $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $(6, 2)$

8.(9p) Fie funcția $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \operatorname{arctg} x$. Să se determine asimptotele la graficul funcției f .

a) $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ b) $y = \frac{\pi}{2}x - 1, y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ c) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1$
d) nu există e) $y = -\frac{\pi}{2}x + 1, y = \frac{\pi}{2}x + 1$

9.(7p) Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\sin x^2}$, unde D este domeniul maxim de definiție. Să se studieze derivabilitatea lui f în punctul $x_0 = 0$. În caz afirmativ să se determine $f'(0)$.

- a) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = -1$
- b) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 2$
- c) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 1$
- d) f nu este derivabilă în $x_0 = 0$
- e) f este derivabilă în $x_0 = 0$ și $f'(0) = 0$

10.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{ax + a - 2}{x^2 + 1},$$

unde a este un parametru real. Să se determine a astfel încât funcția să aibă un extrem în punctul $x = 1$.

- a) -2
- b) 1
- c) -1
- d) 3
- e) 2

11.(9p) Să se calculeze

$$\int_{-1}^0 |4x^2 - 11x - 3| dx.$$

- a) $\frac{435}{96}$
- b) $\frac{135}{32}$
- c) $\frac{221}{48}$
- d) $\frac{37}{96}$
- e) $\frac{231}{48}$

12.(7p) Calculați aria cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln^2 x$, axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

- a) $\frac{e^2}{2} - \frac{5}{4e^2}$
- b) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$
- c) $\frac{e^2}{2} - \frac{3}{4e^2}$
- d) $\frac{e^2}{4} - \frac{7}{4e^2}$
- e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{4e^2}$

SOLUȚII AC+ETC 2014

1. Punem condiția de existență $x + 7 \geq 0$ și obținem $x \in [-7, +\infty)$.

Notăm $\sqrt[3]{2-x} = u$ și $\sqrt{x+7} = v$ și atunci avem $2-x = u^3$ și $x+7 = v^2$, de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} u^3 + v^2 = 9 \\ u + v = 3 \end{cases}$$

cu soluțiile $u_1 = 0, v_1 = 3, u_2 = 2, v_2 = 1, u_3 = -3$ și $v_3 = 6$, adică $x_1 = 2, x_2 = -6$ și $x_3 = 29$.

În concluzie, suma modulelor rădăcinilor ecuației este

$$|2| + |-6| + |29| = 37.$$

Răspuns corect: e).

2.

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i k! [(k+1)^2 - 2(k+1) + 2] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \sum_{k=1}^i [k!(k+1)(k+1) - 2k!(k+1) + 2k!] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \left[\sum_{k=1}^i [(k+1)!(k+1)] - 2 \sum_{k=1}^i [(k+1)! - k!] \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \left(1 + \frac{1}{i} \right) \left[\sum_{k=1}^i [(k+1)!(k+2-1)] - 2[(i+1)! - 1] \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} \left[\sum_{k=1}^i [(k+2)! - (k+1)!] - 2(i+1)! + 2 \right] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+2)! - 2 - 2(i+1)! + 2] \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{2014} \left\{ \frac{1+i}{i} [(i+1)!(i+2) - 2(i+1)!] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{2014} \left[\frac{1+i}{i} (i+1)! i \right] = \sum_{i=1}^{2014} [(1+i)(i+1)!] = \\
&= \sum_{i=1}^{2014} [(2+i-1)(i+1)!] = \sum_{i=1}^{2014} [(2+i)! - (i+1)!] = \\
&= 2016! - 2
\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

3. Cum

$$\begin{aligned}
a_{11} &= (-1)^{1+1} = 1, & a_{22} &= (-1)^{2+2} = 1, & a_{33} &= (-1)^{3+3} = 1, \\
a_{12} &= (-1)^{1+2} C_2^1 = -2, & a_{13} &= (-1)^{1+3} C_3^1 = 3, & a_{23} &= (-1)^{2+3} C_3^2 = -3, \\
a_{21} &= 0, & a_{31} &= 0, & a_{32} &= 0,
\end{aligned}$$

rezultă că

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

și atunci

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Răspuns corect: b).

4. Simetricul elementului

$$A(2014) = \begin{pmatrix} 1 & 2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

în raport cu înmulțirea matricelor este

$$[A(2014)]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2014 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(-2014).$$

Răspuns corect: c).

5. Cum restul împărțirii polinomului g la f este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$g = f \cdot q + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde q este câtul împărțirii, adică

$$(x - 2015)^{2014} + x - 2001 = (x - 2014)(x - 2016) \cdot q + ax + b.$$

Pentru $x = 2014$ și $x = 2016$, ecuația precedentă ne conduce la sistemul

$$\begin{cases} 2014a + b = 14 \\ 2016a + b = 16 \end{cases}$$

cu soluția $a = 1$ și $b = -2000$.

În concluzie, restul căutat este $X - 2000$.

Răspuns corect: b).

6. Cum $a \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ rezultă că $\frac{a}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right)$, iar $\operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0, \sqrt{2} - 1)$, deoarece

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0,$$

adică $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

Deci, relația din enunț este echivalentă cu

$$\frac{2\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} = \frac{7}{5}, \quad \text{unde } \operatorname{tg} \frac{a}{2} \in (0, \sqrt{2} - 1),$$

adică

$$6\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 5\operatorname{tg} \frac{a}{2} + 1 = 0,$$

de unde obținem că $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ este singura soluție.

Răspuns corect: a).

7. Dreapta d intersectează axele de coordonate în punctele $A(1, 0)$ și $B(0, 2)$.
Cum punctul G este centrul de greutate al $\triangle ABC$, rezultă că

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Leftrightarrow 3 = \frac{1 + 0 + x_C}{3} \Leftrightarrow x_C = 8$$

și

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow 2 = \frac{0 + 2 + y_C}{3} \Leftrightarrow y_C = 4.$$

Răspuns corect: a).

8. Cum $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rezultă că funcția f nu are asimptote orizontale.
În continuare, verificăm dacă f are asimptote oblice, adică asimptote de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctg x = \pm \frac{\pi}{2}$$

și

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) \mp \frac{\pi}{2}x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\arctg x \mp \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg x \mp \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\frac{1}{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{x^2}{1+x^2} = -1. \end{aligned}$$

În concluzie, $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $+\infty$ și $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică la $-\infty$.

Răspuns corect: b).

9. Deoarece

$$\begin{aligned} f'_s(0) &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = -1 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} f'_d(0) &= \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{\sin x^2}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{\frac{\sin x^2}{x^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \\ &= \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = 1, \end{aligned}$$

rezultă că f nu este derivabilă în 0.

Răspuns corect: d).

10. Cum f admite un extrem în punctul $x = 1$, rezultă că $f'(1) = 0$.

Dar

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a(x^2 + 1) - (ax + a - 2) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{ax^2 + a - 2ax^2 - 2ax + 4x}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{-ax^2 + (4 - 2a)x + a}{(x^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

ceea ce ne conduce la ecuația $4 - 2a = 0$ cu soluția reală $a = 2$.

Răspuns corect: e).

11. Deoarece

$$|4x^2 - 11x - 3| = \begin{cases} 4x^2 - 11x - 3, & \text{dacă } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup [3, \infty) \\ -4x^2 + 11x + 3, & \text{dacă } x \in \left(-\frac{1}{4}, 3\right), \end{cases}$$

integrala devine

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{4}} (4x^2 - 11x - 3) dx + \int_{-\frac{1}{4}}^0 (-4x^2 + 11x + 3) dx =$$

$$= \left(4 \cdot \frac{x^3}{3} - 11 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_{-1}^{-\frac{1}{4}} + \left(-4 \cdot \frac{x^3}{3} + 11 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-\frac{1}{4}}^0 = \frac{221}{48}.$$

Răspuns corect: c).

12. Folosind formula de integrare prin părți de două ori, obținem

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x^2}{2} (\ln^2 x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x^2}{2} (\ln x)' dx = -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e x dx = \\ &= -\frac{1}{e^2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4e^2} = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2015

A

1.(7p) Fie ecuația $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = 3$. Să se determine suma rădăcinilor ecuației.

a) $S = -49$ b) $S = 49$ c) $S = 0$ d) $S = -48$ e) $S = 48$

2.(9p) Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{3} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}.$$

Să se determine suma tuturor elementelor mulțimii

$$M = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} : \frac{1}{2} \leq x_n \leq \frac{2}{3} \right\}.$$

- a) 7 b) 18 c) 9 d) 20 e) 12

3.(9p) Fie mulțimile

$$M = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = 2 \text{ și } \left[\frac{1}{|z - 3|} \right] = 1 \right\}, \quad P = \{|z| : z \in M\}.$$

Atunci:

- a) $P \subset \left(4, \frac{\sqrt{70}}{2} \right]$ b) $P = \left(4, \frac{35}{8} \right)$ c) $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right)$
d) $P \subset (1, 4]$ e) $P = \left(4, \frac{\sqrt{75}}{2} \right)$

4.(8p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care sistemul

$$\begin{cases} mx - 2y = 1 \\ -2x + y = m \\ x + my = -2 \end{cases}$$

este compatibil.

- a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ c) $\{-1\}$ d) $\{\pm 1, 2\}$ e) $\{1\}$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se determine $(b+c)^a$ știind că restul împărțirii polinomului f la $X^2 + 2$ să fie $X + 1$ și restul împărțirii lui f la $X + 1$ este 3.

- a) 49 b) 32 c) $\frac{1}{64}$ d) 64 e) -27

6.(10p) Fie OA și OB două raze perpendiculare în cercul de centru O și rază $2\sqrt{5}$. Să se calculeze latura pătratului $MNPQ$, unde $Q \in (OA)$, $P \in (OB)$, iar M și N aparțin arcului mic AB .

- a) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) $2\sqrt{2}$ d) 2 e) $\sqrt{2}$

7.(8p) Fie C simetricul punctului $A(1, 2)$ față de punctul $B(3, 4)$. Prin C se duce o dreaptă d ce intersectează axa Ox în punctul P . Să se determine toate valorile pantei dreptei d astfel încât aria triunghiului APC să fie egală cu 4.

- a) $-3, 1$ b) $\frac{6}{5}, \frac{6}{7}$ c) $-2, 0$ d) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}$ e) $1, \frac{6}{5}$

8.(9p) Să se determine

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1)).$$

- a) ∞ b) 0 c) 1 d) $-\infty$ e) nu există

9.(10p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{2} + 1$ b) $\frac{\pi}{2} - 1$ c) $\pi + 1$ d) $\pi - \frac{1}{2}$ e) $\frac{\pi - 1}{2}$

10.(8p) Să se determine aria figurii plane situată în cadranul IV, mărginită de parabola $y^2 = 9 - 2x$ și de dreapta $2x - 3y = 9$.

- a) 9 b) $\frac{9}{2}$ c) 18 d) $\frac{9}{4}$ e) 24

11.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$. Să se determine mulțimea absciselor punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{0\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{-1, 1\}$ e) $\{1\}$

12.(7p) Fie funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1.

- a) $2y - x + 1 = 0$ b) $y - x - 1 = 0$ c) $y + x = 0$
 d) $y - x + 1 = 0$ e) $y - 2x + 1 = 0$

SOLUȚII AC+ETC 2015

1. Notând $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = u$, $\sqrt[3]{8 - \sqrt{x}} = v$ și eliminând x din cele două relații, se obține:

$$u + v = 3, u^3 + v^3 = 9,$$

cu soluțiile $u = 2, v = 1$ și $u = 1, v = 2$. Rezultă $x = 49$ sau $x = 0$.

Răspuns corect: b).

2. Avem succesiv:

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{C_{k+1}^2}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 + k + 2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} \\ &= \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+2}{k+1} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k+1} = \frac{n+2}{3n}. \end{aligned}$$

Rămâne de rezolvat în \mathbb{N} inecuația:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{n+2}{3n} \leq \frac{2}{3},$$

deci $n \in \{2, 3, 4\}$.

Răspuns corect: c).

3. Considerăm numărul complex z scris în forma algebrică, adică $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}$. Din condiția $|z - 2| = 2$ se obține $a^2 + b^2 = 4a$, adică $-a^2 + 4a = b^2 \geq 0$, ceea ce implică $a \in [0, 4]$.

Din a doua relație, $1 \leq \frac{1}{|z - 3|} < 2$ rezultă $\frac{1}{4} < 9 - 2a \leq 1$, deci $a \in \left[4, \frac{35}{8}\right)$. Ținând acum cont că $a \in [0, 4]$ avem unica soluție $a = 4, b = 0$ sau $z = 4$, deci $P = \{4\}$.

Răspuns corect: d).

4. Din Teorema Kronecker-Capelli, sistemul este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Cum rangul maxim al lui A este 2, rezultă că determinantul lui \bar{A} trebuie să fie 0, adică $m = 1$. Se verifică ușor că pentru $m = 1$ avem $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$, deci sistemul este compatibil.

Răspuns corect: e).

5. Aplicând Teorema lui Bézout rezultă că $f(-1) = 3$ și aplicând apoi Teorema împărțirii cu rest, rezultă că există polinomul Q astfel încât

$$f(x) = (x^2 + 2)Q(x) + x + 1.$$

Coroborând acum cele două informații, avem $a - b + c = 4$. Înlocuind în polinomul f pe $c = 4 - a + b$ și împărțindu-l la $X^2 + 2$ se obține restul $(b - 2)X + 4 - 3a + b$, care trebuie să coincidă cu $X + 1$. Se obțin $a = 2, b = 3, c = 5$.

Răspuns corect: d).

6. Notând cu x lungimea segmentelor $[OQ]$ și $[OP]$, cu C proiecția punctului O pe latura PQ și cu D proiecția punctului O pe latura MN rezultă imediat că latura pătratului $MNPQ$ este $x\sqrt{2}$, $OC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, iar $OD = \frac{3x\sqrt{2}}{2}$. Aplicând Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic OMD se obține că $x = 2$, deci latura pătratului $MNPQ$ este $PQ = 2\sqrt{2}$.

Răspuns corect: c).

7. Cum C este simetricul punctului $A(1, 2)$ față de $B(3, 4)$, se obține imediat că $C(5, 6)$. Fie $P(p, 0)$, $p \in \mathbb{R}$. Atunci, aria triunghiului APC se calculează astfel:

$$A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |2p + 2| = 4,$$

de unde rezultă că $p = 1$ sau $p = -3$. Dacă $p = 1$ atunci panta dreptei AP este $m = \frac{3}{2}$, iar dacă $p = -3$ se obține $m = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

8. Făcând schimbarea de variabilă $e^x + 1 = y$, avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x \ln(e^x + 1)) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\ln^2(y-1) - \ln(y-1) \ln y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln(y-1) \cdot \ln \frac{y-1}{y}.$$

Din cauza nedeterminării $0 \cdot \infty$, trecem unul din factori la numitorul celuilalt și aplicăm apoi de două ori Regula lui l' Hospital:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{y-1}{y}}{\ln(y-1)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-\ln^2(y-1)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{-2}{y-1} = 0.$$

Răspuns corect: b).

9. Amplificând raportul din integrală cu $\sqrt{x-1}$ se obține:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{3-x}} dx &= \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx \\ &= \int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-(x-2)^2}} dx \\ &= -\sqrt{1-(x-2)^2} \Big|_1^2 + \arcsin(x-2) \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

10. Punctele de intersecție ale parabolei $y^2 = 9 - 2x$ cu dreapta $2x - 3y = 9$ sunt $A(0, -3)$ și $B\left(\frac{9}{2}, 0\right)$. Cum graficul parabolei se află sub graficul dreptei pe tot interiorul intervalului $\left[0, \frac{9}{2}\right]$, aria suprafeței determinate de parabolă și dreaptă se calculează cu formula:

$$A = \int_0^{\frac{9}{2}} \left(\frac{2x-9}{3} + \sqrt{9-2x} \right) dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^{\frac{9}{2}} - 3x \Big|_0^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{3}(9-2x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{9}{2}} = \frac{9}{4}.$$

Răspuns corect: d).

11. Știind că mulțimea punctelor de extrem local ale unei funcții se găsesc printre soluțiile primei derivate, rezolvăm ecuația $f'(x) = 0$. Se obțin soluțiile $x = \pm 1$. Folosind tabelul de monotonie al funcției f se observă că $x = -1$ este punct de maxim local, iar $x = 1$ este punct de minim local al funcției f .

Răspuns corect: d).

12. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obține $y = x - 1$.

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: IULIE, DATA 26.07.2016

A

1.(8p) Să se determine valoarea minimă m , respectiv valoarea maximă M , a funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

- a) $m = -\frac{1}{4}, M = 0$ b) $m = 0, M = 42$ c) $m = -42, M = 0$
 d) $m = 0, M = 2$ e) $m = -\frac{1}{4}, M = 2$

2.(9p) Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_2 k^2} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_3 k^2} + \dots + \frac{1}{\sum_{k=1}^{2016} \log_{2016} k^2} - \frac{1}{3}.$$

- a) $S = 0$ b) $S = \frac{2015}{3}$ c) $S = 2016$ d) $S = \frac{1}{6}$ e) $S = \frac{2}{3}$

3.(7p) Fie $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine suma elementelor matricei X .

- a) 11 b) 12 c) 10 d) 4 e) 5

4.(8p) Fie $G = (3, +\infty)$. Să se găsească valorile parametrilor reali a și b astfel încât legea de compoziție

$$x * y = xy - 3x - 3y + a$$

să determine pe G o structură de grup abelian, iar aplicația $f : \mathbb{R} \rightarrow G$, $f(x) = e^x + b$ să fie morfism între grupul aditiv al numerelor reale $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, *)$.

- a) $a = -12, b = 3$ b) $a = 3, b = 12$ c) $a = 12, b = 3$
 d) $a = 12, b = -3$ e) $a = 3, b = -3$

5.(7p) Să se determine numărul de rădăcini întregi n ale polinomul

$$X^3 + X^2 + X - 3.$$

- a) 4 b) 0 c) 3 d) 1 e) 2

6.(10p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care nu există $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ astfel încât

$$\cos 4x + (m + 3)(\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0.$$

- a) $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ b) $m \in [1, 2]$ c) $m = 2$
d) $m = 3$ e) $m \in (2, 3)$

7.(9p) În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, -2)$ și $B(1, 3)$. Să se determine valoarea parametrului pozitiv a pentru care punctul $P(2, a)$ aparține bisectoarei unghiului AOB .

- a) $10\sqrt{2} - 14$ b) $\frac{\sqrt{2}}{10}$ c) $14\sqrt{2} - 10$ d) $\frac{\sqrt{3}}{10}$ e) $\frac{1}{10}$

8.(8p) Să se calculeze

$$\lim_{x \searrow 0} x^x.$$

- a) $\frac{1}{e}$ b) 0 c) 1 d) ∞ e) e

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e \cdot x$. Să se determine imaginea mulțimii \mathbb{R} prin f .

- a) $[1, \infty)$ b) $[e, \infty)$ c) $(-\infty, 0]$ d) $[0, \infty)$ e) \mathbb{R}

10.(8p) Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \cdot \ln x$. Să se determine panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$.

- a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{3}{2}$ d) 1 e) e

11.(8p) Să se calculeze integrala

$$\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x(1 + \sqrt{\ln x})^3} dx.$$

- a) $\frac{5}{4} - 2 \ln 2$ b) $2 \ln 2 - \frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{4} - \ln 4$ d) $\ln 4 - \frac{5}{4}$ e) $2 \ln 2 - \frac{5}{6}$

12.(10p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 4}},$$

axa Ox și dreptele $x = 1$, respectiv $x = 3$.

- a) $\sqrt{13} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{(\sqrt{13} - 3)(\sqrt{5} + 1)}{4}$
 b) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}$
 c) $13\sqrt{5} - 4 \ln (3 + 2\sqrt{2})$
 d) $4\sqrt{2} + \sqrt{13} - \sqrt{5} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}$
 e) $\sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} - 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}$

SOLUȚII AC+ETC 2016

1. Cum vârful parabolei asociate funcției $f(x)$ este $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, minimul funcției pe intervalul $[1, 3]$ este $m = -\frac{1}{4}$; în plus, $f(1) = 0, f(3) = 2$, deci maximul este $M = 2$.

Răspuns corect: e).

2. Suma dată se poate scrie succesiv:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2^2 + \dots + \log_2 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2^2 + \dots + \log_3 2016^2} + \\
 &\quad + \dots + \frac{1}{\log_{2016} 1 + \log_{2016} 2^2 + \dots + \log_{2016} 2016^2} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{1}{\log_2 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} + \frac{1}{\log_3 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} + \dots + \frac{1}{\log_{2016} 1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} - \frac{1}{3} \\
 &= \log_{1^2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2016^2} 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2016 - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

3. Considerând $X = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, ecuația devine:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se obțin relațiile $2a - 4b + c = 1$, $b = 2$, $5a - 12b + 3c = 3$ de unde $a = 0$, $b = 2$, $c = 9$, deci $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

Răspuns corect: a).

4. Din condiția ca legea de compoziție să fie asociativă se obține $a = 12$. Se observă că pentru această valoare a parametrului a restul axiomelor grupului sunt îndeplinite. Folosind definiția morfismului între două grupuri, $f(x + y) = f(x) \star f(y)$, avem succesiv:

$$f(x + y) = e^{x+y} + b$$

și

$$f(x) \star f(y) = e^{x+y} + (b-3)e^x + (b-3)e^y + b^2 - 4b + 12.$$

Egalând cele două expresii, se obține $(b-3)(e^x + e^y + b + 4) = 0$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, adică $b = 3$.

Răspuns corect: c).

5. Se observă că suma coeficienților polinomului este 0, deci $x = 1$ este rădăcină a polinomului. Împărțind polinomul la $X - 1$ (sau folosind Schema lui Horner) se obține câtul $X^2 + 2X + 3$ care, având discriminantul negativ, nu mai are rădăcini reale. Deci polinomul are o singură rădăcină întreagă.

Răspuns corect: d).

6. Ecuația dată se poate scrie sub forma:

$$-2\sin^2 2x + (m+3)\sin 2x - 2m + 2 = 0.$$

Notând $\sin 2x = t$, ecuația devine:

$$-2t^2 + (m+3)t - 2m + 2 = 0,$$

și are rădăcinile $t_1 = 2, t_2 = \frac{m-1}{2}$. Cum prima rădăcină este în afara intervalului $[0, 1]$, rămâne ca și a doua rădăcină să fie în afara aceluiași interval, adică $\frac{m-1}{2} < 0$ și $\frac{m-1}{2} > 1$. Se obține $m \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Răspuns corect: a).

7. Folosind proprietatea punctelor aflate pe bisectoarea unui unghi de a se afla la distanțe egale de laturile unghiului, punem condiția $d(P, OB) = d(P, OA)$. Se găsesc ecuațiile dreptelor $OA : y = -2x$ și $OB : y = 3x$, deci distanțele de la punctul P aflat pe bisectoare la acestea sunt:

$$d(P, OA) = \frac{|4+a|}{\sqrt{5}}, \quad d(P, OB) = \frac{|6-a|}{\sqrt{10}}.$$

Egalând cele două expresii se obține $a = 10\sqrt{2} - 14$.

Răspuns corect: a).

8. Observăm că suntem în cazul nedeterminării 0^0 , deci avem succesiv:

$$\lim_{x \searrow 0} x^x = \lim_{x \searrow 0} e^{x \ln x} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}.$$

Aplicând Regula lui l' Hospital, se obține:

$$\lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \searrow 0} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}} = e^{-\lim_{x \searrow 0} x} = e^0 = 1.$$

Răspuns corect: c).

9. Soluția ecuației $f'(x) = 0$ este $x = 1$ iar limitele la capetele domeniului de definiție sunt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Folosind tabloul de variație al funcției, se obține că $Im f = [0, \infty)$.

Răspuns corect: d).

10. Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, 0)$ este $f'(1) = 1$.

Răspuns corect: d).

11. Folosind substituția $\ln x = t$, $\frac{1}{x} dx = dt$, integrala devine:

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t}}{(1 + \sqrt{t})^3} dt = 2 \int_1^2 \frac{t}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})^3} dt.$$

Se face apoi schimbarea de variabilă $1 + \sqrt{t} = s$, $\frac{1}{2\sqrt{t}} dt = ds$ și se obține:

$$2 \int_1^2 \frac{(s-1)^2}{s^3} ds = 2 \left(\int_1^2 \frac{1}{s} ds - 2 \int_1^2 \frac{1}{s^2} ds + \int_1^2 \frac{1}{s^3} ds \right) = 2 \ln 2 - \frac{5}{4}.$$

Răspuns corect: d).

12. Observând că funcția f este pozitivă pe intervalul $[2, 3]$ și negativă pe $[1, 2]$, aria se va calcula astfel:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{2-x}{\sqrt{x^2+4}} dx + \int_2^3 \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}} dx \\ &= 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) \Big|_1^2 - \sqrt{x^2+4} \Big|_1^2 + \sqrt{x^2+4} \Big|_2^3 - 2 \ln(x + \sqrt{x^2+4}) \Big|_2^3 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13} - 4\sqrt{2} + 2 \ln \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{13} - 3)}{4}.$$

Răspuns corect: b).

SESIUNEA: IULIE, DATA 25.07.2017

A

1.(9p) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației

$$x^2 - 2a(x - 1) - x(a + 1) = -a,$$

unde a este un parametru real. Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 - 1$.

- a) $9a^2 + 1$ b) $9a^2 - 12a$ c) $9a^2 - 1$ d) $9a^2$ e) $9a^2 - 3a + 12$

2.(7p) Să se determine numărul termenilor raționali ai dezvoltării binomului

$$(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}.$$

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

3.(8p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix}.$$

- a) 0 b) $-4(b-a)(c-a)(c-b)$
 c) $12(b-a)(c-a)(c-b)$ d) $4(b-a)(c-a)(b-c)$
 e) $12(a-b)(c-a)(b-c)$

4.(9p) Fie mulțimea numerelor reale înzestrată cu legea de compoziție

$$x * y = 2xy - 6(x + y) + 21$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Produsul soluțiilor ecuației $2^x * 2^{-x} = 8$ este:

- a) 0 b) -1 c) 1 d) 2 e) $\frac{1}{2}$

5.(10p) Să se determine restul împărțirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la polinomul $X^2 - X + 1$.

- a) $X - 1$ b) X c) $X + 1$ d) $-X + 1$ e) $-X - 1$

6.(7p) În paralelogramul $ABCD$, unghiurile \widehat{BAC} și \widehat{ABC} au măsurile de 30° , respectiv 135° , iar lungimea laturii AD este 3. Să se calculeze aria paralelogramului $ABCD$.

- a) $\frac{9}{4}(3 - \sqrt{3})$ b) $\frac{3}{2}(3 - \sqrt{3})$ c) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} + 1)$
d) $\frac{9}{4}(\sqrt{3} - 1)$ e) $\frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1)$

7.(8p) Prin punctul A de intersecție a dreptelor $d_1 : x + y - 2 = 0$ și $d_2 : 2x - y - 4 = 0$ se duce o dreaptă d paralelă cu dreapta de ecuație $y = x$. Fie P un punct oarecare al dreptei d , diferit de A . Să se calculeze raportul dintre distanța de la P la d_1 și distanța de la P la d_2 .

- a) $2\sqrt{5}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{10}$ d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ e) $2\sqrt{10}$

8.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1}$. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x) \right)^{\frac{1}{x}}.$$

- a) e^3 b) e c) 1 d) e^2 e) ∞

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$. Să se calculeze $f''(-1)$.

- a) $7e$ b) $-7e$ c) e d) $-3e$ e) $4e$

10.(8p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x|}$. Să se determine mulțimea tuturor punctelor de extrem local ale funcției f .

- a) $\{2\}$ b) $\{0, 2, 4\}$ c) $\{2, 4\}$ d) $\{0, 4\}$ e) \emptyset

11.(8p) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_{-a}^a \frac{x^4}{e^x + 1} dx = -\frac{32}{5}.$$

- a) 1 b) $-\sqrt[3]{3^2}$ c) $-3\sqrt[3]{3^2}$ d) 2 e) -2

12.(10p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln(1+x)}}{x}.$$

- a) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4}$ b) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{64}{3}$ c) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{9}{4}$ d) $\frac{\pi}{3} \ln \frac{3\sqrt{3}}{4}$ e) $\pi \ln \frac{5}{\sqrt[3]{4}}$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2017

1. Deoarece ecuația din enunț este echivalentă cu $x^2 - (3a + 1)x + 3a = 0$, se observă că $x_1 + x_2 = 3a + 1$ și $x_1 x_2 = 3a$, de unde

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 1 = 9a^2.$$

Răspuns corect: d).

2. Termenul general din dezvoltarea binomului $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[5]{2})^{80}$ fiind

$$T_{k+1} = C_{80}^k (\sqrt[3]{5})^{80-k} (\sqrt[5]{2})^k = C_{80}^k 5^{\frac{80-k}{3}} 2^{\frac{k}{5}}, \quad k \in \overline{0, 80},$$

el este număr rațional dacă și numai dacă sunt satisfăcute simultan condițiile:

$$\frac{80-k}{3} \in \mathbb{N} \quad \text{și} \quad \frac{k}{5} \in \mathbb{N},$$

adică $k \in \{5, 20, 35, 50, 65, 80\}$.

Răspuns corect: d).

3. Făcând operații cu coloane și linii, determinantul poate fi scris

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a-2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b-2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c-2)^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 := \underline{\underline{C_2}} - C_1 \\ C_3 := \underline{\underline{C_3}} - C_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & -4a+4 \\ b^2 & 2b+1 & -4b+4 \\ c^2 & 2c+1 & -4c+4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_3 := \underline{\underline{C_3}} + 2C_2 \end{matrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 & 2b+1 & 1 \\ c^2 & 2c+1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_2 := \underline{\underline{L_2}} - L_1 \\ L_3 := \underline{\underline{L_3}} - L_1 \end{matrix} 6 \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 1 \\ b^2 - a^2 & 2(b-a) & 0 \\ c^2 - a^2 & 2(c-a) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 12(b-a)(c-a)(b-c).$$

Răspuns corect: c).

4. Ecuația din enunț este echivalentă cu $2(2^x + 2^{-x}) = 5$, care are soluțiile $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$, deci produsul lor este -1 .

Răspuns corect: b).

5. Cum restul împărțirii polinomului $(2X^3 + X + 1)^{2017}$ la $X^2 - X + 1$ este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$(2x^3 + x + 1)^{2017} = (x^2 - x + 1) \cdot Q(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărțirii.

Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 - X + 1$. Atunci $\omega^3 = -1$ și $\omega^2 - \omega + 1 = 0$, adică $\omega^2 = \omega - 1$ și înlocuind pe x cu ω în relația de mai sus se obține

$$(\omega - 1)^{2017} = a\omega + b \Leftrightarrow (\omega^2)^{2017} = a\omega + b \Leftrightarrow \omega^2 = a\omega + b,$$

de unde rezultă că $a = 1$ și $b = -1$, deci restul căutat este $X - 1$.

Răspuns corect: d).

6. Aplicând Teorema sinusurilor în triunghiul ABC se obține că

$$\frac{BC}{\sin(\widehat{BAC})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \Leftrightarrow AC = 3\sqrt{2}.$$

Cum $m(\widehat{ACB}) = 15^\circ$ și

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

atunci din Teorema cosinusului avem că

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{ACB}) = 9(2 - \sqrt{3}) = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1) \right]^2,$$

adică

$$A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin(\widehat{ABC}) = \frac{9}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

Răspuns corect: e).

7. Cum A este punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 , atunci coordonatele lui se găsesc rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte și obținem $A(2, 0)$, iar ecuația dreptei d este $y = x - 2$.

Fie $P(p, p - 2) \in d$, $p \neq 2$. Raportul cerut este

$$\frac{d(P, d_1)}{d(P, d_2)} = \frac{\frac{2|p - 2|}{\sqrt{2}}}{\frac{|p - 2|}{\sqrt{5}}} = \sqrt{10}.$$

Răspuns corect: c).

8. Funcția f poate fi scrisă

$$f(x) = \frac{3x^4}{x^2 + 1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2}{x^2 + 1} = 3x^2 \cdot \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} = 3x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right)$$

și atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(e^x)\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3e^{2x} \left(1 - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right)\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{x}} e^2 \left(1 - \frac{1}{e^{2x} + 1}\right)^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

Răspuns corect: d).

9. Observând că $f'(x) = e^{-x}(2x - x^2)$ și $f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, rezultă că $f''(-1) = 7e$.

Răspuns corect: a).

10. Explicitând modulul, funcția f devine

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4x}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0] \cup [4, +\infty) \\ \sqrt{-x^2 + 4x}, & \text{dacă } x \in (0, 4), \end{cases}$$

iar derivata sa este

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{2\sqrt{x^2 - 4x}}, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty) \\ \frac{-x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 4x}}, & \text{dacă } x \in (0, 4). \end{cases}$$

Din tabloul de variație al funcției se observă că punctele de extrem ale funcției sunt $\{0, 2, 4\}$.

Răspuns corect: b).

11. Notând integrala din enunț cu I și făcând schimbarea de variabilă $-x = t$ obținem

$$I = \int_a^{-a} -\frac{t^4}{e^{-t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{t^4 e^t}{e^t + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{t^4 (e^t + 1 - 1)}{e^t + 1} dt =$$

$$= \int_{-a}^a \left(t^4 - \frac{t^4}{e^t + 1} \right) dt = \frac{t^5}{5} \Big|_{-a}^a - I \quad \Leftrightarrow \quad I = \frac{a^5}{5}$$

Prin urmare, soluția ecuației $\frac{a^5}{5} = -\frac{32}{5}$ este $a = -2$.

Răspuns corect: e).

12. Volumul căutat este

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \frac{\ln(x+1)}{x^2} dx = \pi \int_1^3 \ln(x+1) \left(-\frac{1}{x} \right)' dx = \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x} \ln(x+1) \Big|_1^3 + \int_1^3 \frac{1}{x(x+1)} dx \right] = \\ &= \pi \left[\frac{1}{3} \ln 2 + \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \right] = \frac{\pi}{3} \ln \frac{27}{4} . \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 13.09.2017

A

1.(8p) Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației

$$\log_2(6x^2 - 11x + 6) = 0.$$

Să se determine $x_1 + x_2$.

- a) $\frac{5}{6}$ b) 1 c) $\frac{11}{6}$ d) 8 e) 12

2.(9p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ în care $a_1 = 1$ și rația $r = \frac{1}{2}$. Să se determine a_5 .

- a) 3 b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) $\frac{9}{2}$

3.(8p) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Să se calculeze determinantul matricei A^{2017} .

- a) 1 b) 2^{2017} c) -2^{2017} d) 0 e) -1

4.(9p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - z = 4 \end{cases}.$$

- a) $(-2, 1, 1)$ b) $(3, -2, -3)$ c) $(-5, -3, 6)$
d) $(0, -1, 0)$ e) $(-14, -21, 24)$

5.(7p) Fie polinomul $f = X^3 - 2X^2 + aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Să se determine a și b știind că -1 este rădăcină a polinomului f și restul împărțirii polinomului f la $X - 2$ este 6.

- a) $a = 1, b = -1$ b) $a = 1, b = 4$ c) $a = 2, b = 4$
d) $a = 0, b = 3$ e) $a = -4, b = 1$

6.(8p) Să se calculeze $\operatorname{tg} x$ știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{3}{5}$.

- a) $-\frac{3}{4}$ b) 1 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $-\frac{4}{5}$

7.(10p) Fie $a \in \mathbb{R}$ astfel încât punctul $Q(4, -1)$ aparține dreptei

$$d : 2x + ay - 9 = 0.$$

Să se scrie ecuația dreptei ce conține punctul $P(-1, 1)$ și este paralelă cu dreapta d .

- a) $y = x + 2$ b) $y = -x$ c) $y = 2x + 3$
d) $y = -2x - 1$ e) $y = 2x + 1$

8.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^4 + x^2 + 3$. Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

- a) -2 b) 0 c) ∞ d) 1 e) 2

9.(8p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x$. Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 0$.

- a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 0$
d) $y = -x$ e) $y = x + 1$

10.(8p) Să se determine mulțimea punctelor de extrem local ale funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x(x^2 - 2x + 1).$$

- a) $\{-1, 0\}$ b) $\{-1, 1\}$ c) $\{0\}$ d) $\{0, 1\}$ e) \emptyset

11.(10p) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \ln^2 x,$$

axa Ox și dreptele $x = \frac{1}{e}$ și $x = e$.

- a) $\frac{e^2}{8} - \frac{3}{e^2}$ b) $\frac{e^2}{16} - \frac{7}{4e^2}$ c) $\frac{e^2}{2} - \frac{7}{4e^2}$
d) $\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}$ e) $\frac{e^2}{8} - \frac{5}{2e^2}$

12.(7p) Să se calculeze integrala nedefinită

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx$$

pe un interval $I \subset (1, \infty)$.

- a) $\frac{4}{3} \ln(x+5) - \frac{1}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- b) $\frac{1}{3} \ln(x+5) - \frac{4}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- c) $\frac{4}{3} \ln(x+1) + \frac{1}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- d) $\frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{4}{3} \ln(x+5) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$
- e) $\frac{1}{2} \ln(x+5) + \frac{4}{3} \ln(x-1) + \mathcal{C}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2017

1. Cum $6x^2 - 11x + 6 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ecuația din enunț este echivalentă cu $6x^2 - 11x + 5 = 0$ și atunci suma soluțiilor ei este $\frac{11}{6}$.

Răspuns corect: c).

2. Termenul căutat este $a_5 = a_1 + 4r = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

Răspuns corect: a).

3. Cum $\det A = 0$, rezultă că $\det(A^{2017}) = (\det A)^{2017} = 0$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 1 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = -14$, $y = -21$ și $z = 24$.

Răspuns corect: e).

5. Din condițiile $f(-1) = 0$ și $f(2) = 6$ rezultă sistemul

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ 2a + b = 6 \end{cases}$$

care are soluția $a = 1$ și $b = 4$

Răspuns corect: b).

6. Din Formula fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos x = \frac{4}{5}$, de unde se obține că $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum $Q(4, -1)$ aparține dreptei d se obține că $2 \cdot 4 + a \cdot (-1) - 9 = 0$, adică $a = -1$. Din faptul că dreapta căutată este paralelă cu dreapta d rezultă că pantele lor sunt egale cu 2 și prin urmare, ecuația ei este $y = 2x + 3$.

Răspuns corect: c).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 + x^2 + 3}{x^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \left(2 + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} \right)}{x^4} = 2.$$

Răspuns corect: e).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 0 este:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0).$$

Cum $f(0) = 0$ iar $f'(0) = 1$, se obține $y = x$.

Răspuns corect: a).

10. Cum $f'(x) = e^x(x^2 - 1)$, rezultă că $x = \pm 1$ sunt cele două puncte de extrem ale funcției f .

Răspuns corect: b).

11. Aria căutată poate fi scrisă

$$\begin{aligned} A &= \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln^2 x dx = \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln^2 x dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e x \ln x dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^e x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{5}{4e^2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Integrala poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \int \frac{x-3}{x^2+4x-5} dx &= \int \frac{x-3}{(x-1)(x+5)} dx = \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{4}{3} \int \frac{1}{x+5} dx = -\frac{1}{3} \ln(x-1) + \frac{4}{3} \ln(x+5) + C. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 23.07.2018

A

1.(7p) Fie progresia geometrică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, având termenii strict pozitivi și rația 2018. Dacă

$$S = \frac{a_1 + a_2}{a_2 + a_3} + \frac{a_2 + a_3}{a_3 + a_4} + \dots + \frac{a_{2017} + a_{2018}}{a_{2018} + a_{2019}},$$

atunci:

$$\text{a) } S = 1 \quad \text{b) } S = 2017 \quad \text{c) } S = \frac{2017}{2018} \quad \text{d) } S = 2018 \quad \text{e) } S = \frac{2018}{2017}$$

2.(8p) Fie mulțimea

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = 2 \text{ și } \left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1 \right\}.$$

Dacă $S = \sum_{z \in A} z$, atunci:

- a) $S = 1 - 2i$ b) $S = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$ c) $S = 1 + 2i$
d) $S = 3$ e) $S = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$

3.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 0 & n+1 & C_1^1 \\ C_2^1 & (n+1)^2 & C_2^2 \\ C_3^2 & (n+1)^3 & C_3^3 \end{vmatrix}.$$

- a) $n(n+1)(n+2)$ b) 0
c) $n(n+1)(2n-1)$ d) $n(n+1)(2n+1)$
e) $n(n-1)(n+2)$

4.(9p) Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = m \\ 2x + 4y + 6z = -1 \\ -2x + 6y + 4z = 5. \end{cases}$$

Să se determine valorile parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este incompatibil.

- a) $\left\{ -\frac{1}{10} \right\}$ b) $\left\{ \frac{1}{10} \right\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\}$
d) \emptyset e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{10} \right\}$

5.(8p) Se consideră polinoamele

$$f = (X - 2018)^{2017} + X - 2020 \text{ și } g = (X - 2017)(X - 2019).$$

Să se determine restul împărțirii lui f la g .

- a) $4X - 8076$ b) $X + 2019$ c) $2X + 4038$
 d) $2X - 2019$ e) $2X - 4038$

6.(7p) În triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\widehat{A}) = 90^\circ$, $m(\widehat{B}) = 30^\circ$ și $AB = 6$ se înscrie pătratul ce are două vârfuri pe ipotenuză și celelalte două, respectiv, pe câte o catetă. Să se afle lungimea laturii pătratului.

- a) $1 + \sqrt{3}$ b) $\frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$ c) $\frac{6\sqrt{3} - 5}{2}$
 d) $\frac{12}{13}(4\sqrt{3} - 3)$ e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7.(9p) Se dau punctele $A(0, 1)$, $B(1, 1)$ și $C(4, 3)$. Fie $y = mx + n$ ecuația înălțimii triunghiului ABC dusă din A . Să se calculeze $m \cdot n$.

- a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{3}$ e) 1

8.(8p) Se consideră funcția $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{4 - 3x^2}{x^3}.$$

Să se determine mulțimea valorilor funcției f .

- a) \mathbb{R} b) $[1, +\infty)$ c) $[-1, 1]$ d) $[-1, 2]$ e) $[-1, +\infty)$

9.(10p) Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{-x}(ax + b), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$.

- a) $a = 1, b = 1$ b) $a = 3, b = 1$ c) $a = 2, b = 1$
 d) $a = -2, b = -1$ e) $a = 1, b = -1$

10.(7p) Fie funcția $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, unde D este domeniul maxim de definiție a funcției. Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3}.$$

- a) -1 b) $\frac{1}{3}$ c) 0 d) $-\frac{1}{3}$ e) $-\frac{1}{9}$

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}}.$$

- a) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{12}$ e) $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$

12.(9p) Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficele funcțiilor $f, g : \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \cos x$.

- a) $2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2} - 2$ c) $2\sqrt{2} - 1$ d) $4\sqrt{2} - 1$ e) $4\sqrt{2} - 2$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2018

1. Cum $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este o progresie geometrică, atunci suma poate fi scrisă

$$S = \frac{a_1 + a_1 r}{a_1 r + a_1 r^2} + \frac{a_1 r + a_1 r^2}{a_1 r^2 + a_1 r^3} + \dots + \frac{a_1 r^{2016} + a_1 r^{2017}}{a_1 r^{2017} + a_1 r^{2018}} =$$

$$= \frac{a_1(1+r)}{a_1r(1+r)} + \frac{a_1r(1+r)}{a_1r^2(1+r)} + \dots + \frac{a_1r^{2016}(1+r)}{a_1r^{2017}(1+r)} = \frac{1}{r} \cdot 2017 = \frac{2017}{2018}.$$

Răspuns corect: c).

2. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci relația $z \cdot \bar{z} = 2$ este echivalentă cu

$$a^2 + b^2 = 2. \quad (1)$$

Pe de altă parte, relația $\left| \frac{2z+3}{z-3i} \right| = 1$ poate fi scrisă

$$\begin{aligned} \left(\frac{2z+3}{z-3i} \right) \cdot \overline{\left(\frac{2z+3}{z-3i} \right)} &= 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right) \cdot \overline{\left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right)} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2a+2bi+3}{a+bi-3i} \right) \cdot \left(\frac{2a+3-2bi}{a-bi+3i} \right) &= 1 \Leftrightarrow \frac{(2a+3)^2 + 4b^2}{a^2 + (b-3)^2} = 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b &= -2a - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (1) și (2), se obțin două soluții:

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad b_1 = -\frac{7}{5}, \quad \text{de unde} \quad z_1 = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$$

și

$$a_2 = -1, \quad b_2 = 1, \quad \text{de unde} \quad z_2 = -1 + i.$$

În concluzie, $S = z_1 + z_2 = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$.

Răspuns corect: b).

3. Determinantul poate fi scris

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & n+1 & 1 \\ 2 & (n+1)^2 & 1 \\ 3 & (n+1)^3 & 1 \end{vmatrix} &= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & n+1 & 1 \\ 3 & (n+1)^2 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_2:=C_2-C_3}{=} \\ &= (n+1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & (n+1)^2 - 1 & 1 \end{vmatrix} = n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

matricea asociată sistemului. Cum $\det A = 0$ și determinantul principal este

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

rezultă că $\text{rang} A = 2$. Sistemul este incompatibil dacă și numai dacă determinantul caracteristic este nenul, adică

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 3 & m \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & 5 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \neq -\frac{1}{10}.$$

Răspuns corect: e).

5. Cum restul împărțirii polinomului f la g este un polinom de grad cel mult 1, din Teorema împărțirii cu rest avem

$$(x - 2018)^{2017} + x - 2020 = (x - 2017)(x - 2019) \cdot Q(x) + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

unde Q este câtul împărțirii. Înlocuind în această relație pe x cu 2017, respectiv 2019, se obțin relațiile din următorul sistem

$$\begin{cases} 2017a + b = -4 \\ 2019a + b = 0, \end{cases}$$

de unde $a = 2$ și $b = -4038$, adică restul împărțirii lui f la g este $2X - 4038$.

Răspuns corect: d).

6. Fie $D \in [AB]$, $E \in [AC]$, $F, G \in [BC]$ astfel încât $DEFG$ este pătratul a cărei latură ni se cere. Notăm lungimea acestei laturi cu x .

Aplicând Teorema unghiului de 30° în triunghiul BDG cu $m(\widehat{BGD}) = 90^\circ$, rezultă că $BD = 2x$, iar

$$\cos(\widehat{DBG}) = \frac{BG}{BD} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BG}{2x} \Leftrightarrow BG = x\sqrt{3}.$$

Analog, în triunghiul ABC cu $m(\widehat{BAC}) = 90^\circ$, avem

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{BC} \Leftrightarrow BC = 4\sqrt{3},$$

iar în triunghiul EFC cu $m(\widehat{EFC}) = 90^\circ$ și $m(\widehat{FCE}) = 60^\circ$, avem

$$\operatorname{tg}(\widehat{FCE}) = \frac{EF}{FC} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{FC} \Leftrightarrow FC = \frac{x\sqrt{3}}{3}.$$

Dar $BC = BG + GF + FC$, adică $\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + x\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$, de unde se obține $x = \frac{12}{13}(4 - \sqrt{3})$.

Răspuns corect: b).

7. Cum panta dreptei BC este $\frac{2}{3}$, rezultă că panta înălțimii căutate este $-\frac{3}{2}$, iar ecuația ei este $y = -\frac{3}{2}x + 1$. Deci, $m \cdot n = -\frac{3}{2}$.

Răspuns corect: a).

8. Cum funcția f este descrescătoare pe intervalul $[1, 2]$ și crescătoare pe intervalul $(2, \infty)$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, rezultă că $Im f = [-1, 1]$.

Răspuns corect: c).

9. Din $f(0) = 1$, rezultă $b = 1$, iar cum $f'(x) = e^{-x}(-ax - b + a)$ se obține că $a = 3$.

Răspuns corect: b).

10. Aplicând Regula lui l' Hospital, se obține

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\operatorname{tg} x)}{3x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{9x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{9x^2 \cos^2 x} \left(1 - \frac{1}{\cos^2(\operatorname{tg} x)} \right) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{9x^2 \cos^2 x} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{9 \cos^2 x} = -\frac{1}{9}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: e).

11. Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{x-1} = t$, rezultă că $x = t^2 + 1$ și integrala din enunț devine

$$\int_3^7 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x-1}} = 2 \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} \frac{1}{t^2+2} dt = \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{6}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}.$$

Răspuns corect: a).

12. Aria suprafeței căutate poate fi scrisă

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x) dx + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx = 4\sqrt{2} - 2.$$

Răspuns corect: e).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 17.09.2018

A

1.(8p) Să se găsească soluțiile reale ale ecuației

$$\sqrt{1-x-2x^2} = -x-1.$$

- a) 1 b) -1 c) 4 d) 0 și 2 e) 3

2.(9p) Care este probabilitatea să se extragă un număr impar dintre numerele de la 1 la 101.

- a) $\frac{50}{101}$ b) $\frac{51}{100}$ c) $\frac{49}{100}$ d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{51}{101}$

3.(8p) Se consideră matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valoarea expresiei $B - \frac{1}{2}(A + A^t)$.

- a) O_2 b) A c) B d) $-I_2$ e) I_2

4.(10p) Să se calculeze valoarea determinantului

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix}.$$

- a) $2^3 \cdot 7^3$ b) $2 \cdot 7^3$ c) $2^3 \cdot 7$ d) $-2 \cdot 7^3$ e) $-2^3 \cdot 7$

5.(8p) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = xy + 2x + 2y + 2,$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Să se rezolve ecuația

$$x * x = -2.$$

- a) 1 b) -2 c) 0 d) 4 e) -1

6.(8p) Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel ca $\operatorname{tg} x = -2$. Să se calculeze $\cos x$.

a) $-\frac{1}{5}$ b) $-\sqrt{5}$ c) $-\frac{1}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

7.(8p) Se dau punctele $A(2, 3)$, $B(-1, 2)$ și $C(3, 6)$. Fie $y = mx + n$ ecuația medianei dusă din A în triunghiul ABC . Să se calculeze $m + n$.

a) -6 b) 3 c) -4 d) -3 e) 4

8.(10p) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x$, unde $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1}.$$

a) 1 b) e^2 c) ∞ d) e e) e^{-2}

9.(8p) Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x \ln x$. Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 .

a) $y = -x$ b) $y = x + 1$ c) $y + 1 = x$
d) $y = x$ e) $y = 2(x - 1)$

10.(7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{mx + 1}{x^2 + 1}.$$

Să se determine toate valorile parametrului real nenul m astfel ca funcția f să aibă două puncte de extrem.

a) $\{-1\}$ b) $(-1, 1)$ c) $(0, 1)$ d) \mathbb{R}^* e) $[0, +\infty)$

11.(7p) Să se calculeze integrala

$$\int_0^{\pi} (x \cos x)^2 dx.$$

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi}{2} & \text{b)} \frac{\pi^3}{6} + \frac{3\pi}{4} & \text{c)} \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4} \\ \text{d)} \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2} & \text{e)} \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{4} & \end{array}$$

12.(8p) Să se determine aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(10x - \frac{3}{x}\right) \ln x,$$

axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = e^2$.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{15e^4 - 7}{2} & \text{b)} 10e^2 - \frac{7}{2} & \text{c)} \frac{15e^2 - 1}{2} \\ \text{d)} 10e^4 - \frac{7}{2} & \text{e)} \frac{7e^4 - 15}{2} & \end{array}$$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2018

1. Punând condițiile de existență în ecuația dată se obține

$$\begin{cases} 1 - x - 2x^2 \geq 0 \\ -x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right] \\ x \in (-\infty, -1] \end{cases} \Leftrightarrow x = -1$$

care este soluție a ecuației.

Răspuns corect: b).

2. Cum de la 1 la 101 sunt 51 de numere impare, probabilitatea cerută este $\frac{51}{101}$.

Răspuns corect: e).

3. Expresia din enunț poate fi scrisă

$$\begin{aligned} B - \frac{1}{2}(A + A^t) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2. \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

4. Aplicând Regula triunghiului, valoarea determinantului este

$$\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 3^2 & 1^2 & 2^2 \\ 2^2 & 3^2 & 1^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 9 & 1 & 4 \\ 4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 9^3 + 4^3 - 36 - 36 - 36 = 2 \cdot 7^3.$$

Răspuns corect: b).

5. Ecuația din enunț poate fi scrisă $x^2 + 4x + 2 = -2$, care are soluția $x = -2$.

Răspuns corect: b).

6. Cum

$$\operatorname{tg} x = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = -2 \cos x.$$

Aplicând Teorema fundamentală a trigonometriei se obține $\cos x = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. Dar $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $\cos x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Răspuns corect: e).

7. Dacă M este mijlocul segmentului $[BC]$, atunci $M(1, 4)$ și ecuația mediane din A este $y = 5 - x$, de unde rezultă că $m = -1$ și $n = 5$. Deci, $m + n = 4$.

Răspuns corect: e).

8. Limita căutată poate fi scrisă

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + 2x + 5}{x^2 - 1} - 1 \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x + 6}{x^2 - 1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2x + 6}{x^2 - 1} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2x + 6}} \right]^{\frac{2x^2 + 6x}{x^2 - 1}} = e^2.\end{aligned}$$

Răspuns corect: b).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = 0$ iar $f'(1) = 1$, se obține $y = x - 1$.

Răspuns corect: c).

10. Cum $f'(x) = \frac{-mx^2 - 2x + m}{(x^2 + 1)^2}$, rezultă că f are două puncte de extrem dacă și numai dacă discriminantul ecuației $-mx^2 - 2x + m = 0$ este pozitiv. În concluzie,

$$\Delta = 4 + 4m^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad m \in \mathbb{R}^*.$$

Răspuns corect: d).

11. Aplicând Formula de integrare prin părți, integrala din enunț devine

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (x \cos x)^2 dx &= \int_0^\pi x^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \int_0^\pi \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)' dx = \frac{\pi^3}{6} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 \sin 2x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi x \sin 2x dx \right) = \\ &= \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \int_0^\pi x \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right)' dx = \frac{\pi^3}{6} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12. Cum funcția f este pozitivă pe intervalul $[1, e^2]$, aria căutată poate fi scrisă

$$A = \int_1^{e^2} \left(10x - \frac{3}{x} \right) \ln x \, dx = 10 \int_1^{e^2} x \ln x \, dx - 3 \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \ln x \, dx.$$

Pentru prima integrala se folosește Formula de integrare prin părți, iar pentru a doua integrală se face schimbarea de variabilă $\ln x = u$, de unde $\frac{1}{x} dx = du$ și atunci se obține

$$\begin{aligned} A &= 10 \int_1^{e^2} \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x \, dx - 3 \int_0^2 u \, du = \\ &= 10 \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^{e^2} - \frac{x^2}{4} \Big|_1^{e^2} \right) - 3 \cdot \frac{u^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{15e^4 - 7}{2}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: a).

SESIUNEA: IULIE, DATA 22.07.2019

A

1.(8p) Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - (a+2)x + 2a = 0\} \quad \text{și} \quad B = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4ax + 4a^2 = 0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a , știind că $A \cap B$ are un singur element.

- a) $\{0, 2\}$ b) $\{2\}$ c) $\{0, 1\}$ d) $\{0\}$ e) $\{1\}$

2.(7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete și 6 sunt băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți?

6.(9p) Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB = 6$, $AC = 8$ și aria $16\sqrt{2}$. Să se determine $\sin \widehat{C}$.

- a) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$

7.(8p) Fie $A(-1, -1)$, $B(-2, 3)$ și $C(4, 0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui față de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC .

- a) $(1, 2)$ b) $\left(\frac{34}{15}, \frac{53}{15}\right)$ c) $\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$ d) $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$

8.(7p) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1}.$$

- a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9.(8p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^3 - 1) - \frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x = 1$.

- a) $y = 7x - 11$ b) $y = 7x$ c) $y = 11x - 7$
d) $7y = x - 11$ e) $7y = x + 11$

10.(9p) Să se determine numărul real și pozitiv cu proprietatea că diferența dintre dublul său și cubul său este maximă.

- a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

11.(8p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

- a) $2\pi \left(1 + \ln \frac{13}{5}\right)$ b) $\pi \left(2 + \ln \frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi \left(1 - \ln \frac{13}{5}\right)$
 d) $2\pi \ln \frac{13}{5}$ e) $\pi \left(2 - \ln \frac{13}{5}\right)$

12.(10p) Să se calculeze valoarea integralei

$$\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} dx .$$

- a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$

SOLUȚII AC+ETC Iulie 2019

1. Cum soluțiile ecuației $x^2 - (a+2)x + 2a = 0$ sunt a și 2 , iar soluția ecuației $x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ este $2a$, atunci mulțimea $A \cap B$ are un singur element dacă și numai dacă

$$2a = a \iff a = 0$$

sau

$$2a = 2 \iff a = 1 .$$

În concluzie, $a \in \{0, 1\}$.

Răspuns corect: c).

2. Cu 7 fete se poate forma o grupă de câte 3 fete în $C_7^3 = 35$ moduri, iar cu 6 băieți se poate forma o grupă de câte 2 băieți în $C_6^2 = 15$ moduri. Deci, sunt $35 \cdot 15 = 525$ moduri în care se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți.

Răspuns corect: e).

3. Cum $\triangle ABC$ este dreptunghic cu $a > b > c$, atunci din Teorema lui Pitagora avem că $a^2 = b^2 + c^2$, care înlocuită în determinant ne conduce la relația

$$bc(b-2)(c-2)[(b-c)^2 + (a-c)^2 + (a-b)^2] = 0,$$

de unde distingem două cazuri:

a) Dacă $b = 2$, din Teorema sinusurilor, obținem

$$\frac{2}{\sin 75^\circ} = \frac{c}{\sin 15^\circ}.$$

Cum $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ și $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ atunci $c = 4 - 2\sqrt{3}$ și, prin urmare $A_{\triangle ABC} = 4 - 2\sqrt{3}$.

b) Dacă $c = 2$ atunci $A_{\triangle ABC} = 4 + 2\sqrt{3}$.

Răspuns corect: b).

4. Cum f este un izomorfism între corpurile $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{R}, \perp, \top)$, atunci

(i) f este bijectivă, de unde rezultă că $a \neq 0$;

(ii) f satisface simultan condițiile:

$$f(x+y) = f(x) \perp f(y) \Rightarrow b = 1$$

$$f(x \cdot y) = f(x) \top f(y) \Rightarrow a \in \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\}.$$

În concluzie, $a = \frac{1}{2}$ și $b = 1$.

Răspuns corect: c).

5. Fie ω o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$. Atunci $\omega^3 = 1$ și $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.
Cum polinomul $(X + 1)^{17} + mX^2 + n$ se divide cu polinomul $X^2 + X + 1$ se obține că

$$\begin{aligned}(\omega + 1)^{17} + m\omega^2 + n = 0 &\Leftrightarrow (-\omega^2)^{17} + m(-1 - \omega) + n = 0 \Leftrightarrow \\&\Leftrightarrow -(1 + m)\omega - m + n = 0,\end{aligned}$$

de unde $m = n = -1$.

Răspuns corect: c).

6. Notăm $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$. Cum

$$A_{\triangle ABC} = \frac{bc}{2} \cdot \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

și atunci din Teorema fundamentală a trigonometriei rezultă că $\cos A = \frac{1}{3}$.
Aplicând Teorema cosinusului

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow a = 2\sqrt{17}$$

și apoi din Teorema sinusurilor $\sin C = \frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Răspuns corect: d).

7. Cum centrul de greutate al $\triangle ABC$ este $G\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ și $m_{BC} = -\frac{1}{2}$, rezultă că ecuația dreptei GD este $y = 2x$. De asemenea, ecuația dreptei BC este $y = -\frac{1}{2}x + 2$ și dacă $\{E\} = GD \cap BC$ se obține că $E\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$ și că E este mijlocul lui $[GD]$. Deci, $D\left(\frac{19}{15}, \frac{38}{15}\right)$.

Răspuns corect: c).

8. Aplicând Regula lui l' Hospital se obține

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{2019} + 1}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2019x^{2018} + 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} 673x^{2016} = 673.$$

Răspuns corect: c).

9. Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă 1 este:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1).$$

Cum $f(1) = -4$ iar $f'(1) = 7$, se obține $7x - y - 11 = 0$.

Răspuns corect: a).

10. Fie funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - x^3$. Cum $f'(x) = 2 - 3x^2$, rezultă că $x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$ sunt punctele de extrem local ale lui f . În concluzie, f are valoarea maximă pentru $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Răspuns corect: b).

11. Volumul căutat este

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^3 \frac{(x+2)^2}{x^2+4} dx = \pi \int_1^3 \left(1 + \frac{4x}{x^2+4}\right) dx = \\ &= \pi \left(x \Big|_1^3 + 2 \ln(x^2+4) \Big|_1^3\right) = 2\pi \left(1 + \ln \frac{13}{5}\right). \end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

12. Deoarece

$$\frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} = \frac{x}{(x^2 + 7)^2} + \frac{\sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2}$$

și cum $\frac{x}{(x^2 + 7)^2}$ este o funcție impară, rezultă că integrala ei pe intervalul simetric $[-\sqrt{7}, \sqrt{7}]$ este nulă. Prin urmare, avem

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x + \sqrt{7}}{(x^2 + 7)^2} dx &= \sqrt{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{(x^2 + 7)^2} dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{x^2 + 7 - x^2}{(x^2 + 7)^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \left(\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2 + 7} dx + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \frac{x}{(x^2 + 7)^2} dx \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{7}}{7} \left[\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} \Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} x \cdot \left(-\frac{1}{2(x^2+7)} \right)' dx \right] = \\
&= \frac{\pi}{14} - \frac{\sqrt{7}}{7} \left(-\frac{x}{2(x^2+7)} \Big|_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} + \frac{1}{2} \int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}} \frac{1}{x^2+7} dx \right) = \frac{\pi+2}{28}.
\end{aligned}$$

Răspuns corect: d).

SESIUNEA: SEPTEMBRIE, DATA 14.09.2019

A

1.(10p) Câte numere întregi are mulțimea

$$\{x \in \mathbb{R}, |2x-3| \leq 6\} ?$$

- a) 0 b) 7 c) 4 d) 2 e) 6

2.(8p) Să se calculeze

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5}.$$

- a) 5 b) -5 c) 1 d) -1 e) i

3.(8p) Să se determine matricea X care verifică relația

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4.(10p) Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 14 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + y + 3z = 20 \end{cases}.$$

- a) $(1, 1, -1)$ b) $(8, -2, 1)$ c) $(2, -1, 5)$
d) $(2, -7, -1)$ e) $(6, -1, 1)$

5.(7p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de

$$f(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a^2+x^2 & b^2+x^2 & c^2+x^2 \\ a^3+x^3 & b^3+x^3 & c^3+x^3 \end{vmatrix},$$

unde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Să se calculeze $f'(x)$.

- a) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$
b) $f'(x) = (a-b)(c-a)(c-b)[x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc]$
c) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$
d) $f'(x) = (b-a)(c-a)(b-c)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$
e) $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[2x^2 - 3(a+b+c)x + ab + ac + bc]$

6.(8p) Să se calculeze $\sin(2x)$, știind că $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- a) 0 b) 1 c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\sqrt{3}$

7.(8p) Fie A un punct variabil pe dreapta $y = x + 1$, iar B proiecția lui A pe dreapta de ecuație $x = 3$. Atunci mijlocul segmentului (AB) aparține dreptei:

- a) $x = y$ b) $y = 2x$ c) $x + y = 1$
d) $y = 2x - 2$ e) $x + y = 2$

8.(9p) Să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1}.$$

- a) 6 b) 0 c) 1 d) 3 e) 12

9.(9p) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x - 1$. Să se determine $f'(0)$.

- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

10.(8p) Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x}$. Să se determine punctul de extrem local al lui f .

- a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) 2 e) 4

11.(8p) Să se calculeze

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx.$$

- a) $\ln \frac{10}{7} - \operatorname{arctg} \frac{2}{25}$ b) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} 6 + \operatorname{arctg} 3$
c) $\ln \frac{17}{5} - \operatorname{arctg} \frac{2}{9}$ d) $\ln \frac{10}{9} - \operatorname{arctg} \frac{9}{25}$
e) $\ln \frac{34}{7} - \operatorname{arctg} 4 + \operatorname{arctg} 2$

12.(7p) Să se determine constantele reale a și b astfel încât funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x)$$

să fie primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x} \cos 4x$.

- a) $a = \frac{1}{7}$, $b = -\frac{1}{7}$ b) $a = -\frac{1}{17}$, $b = \frac{4}{17}$ c) $a = \frac{4}{17}$, $b = -\frac{4}{17}$
d) $a = b = \frac{5}{17}$ e) $a = -\frac{1}{7}$, $b = \frac{4}{7}$

SOLUȚII AC+ETC Septembrie 2019

1. Inecuația din enunț este echivalentă cu $-6 \leq 2x - 3 \leq 6$, de unde se obține că $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$, deci $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

În concluzie, mulțimea conține 6 numere întregi.

Răspuns corect: e).

2. Frația din enunț poate fi scrisă

$$\frac{i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot i^5}{i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5} = \frac{i^{1+2+3+4+5}}{i - 1 - i + 1 + i} = \frac{i^{15}}{i} = i^{14} = i^{4 \cdot 3 + 2} = i^2 = -1.$$

Răspuns corect: d).

3. Se observă ca matricea X este de forma $(a \ b \ c)$ și atunci ecuația matriceală devine

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (a \ b \ c) = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix},$$

de unde se obține că $a = 2$, $b = -1$ și $c = 3$, deci matricea căutată este $X = (2 \ -1 \ 3)$.

Răspuns corect: d).

4. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea asociată sistemului. Cum $\det A = -5 \neq 0$, rezultă că sistemul este compatibil determinat și aplicând Formulele lui Cramer se obține soluția $x = 2$, $y = -1$ și $z = 5$.

Răspuns corect: c).

5. Funcția din enunț poate fi scrisă

$$\begin{aligned}
 f(x) & \stackrel{C_2:=C_2-C_1}{C_3:=C_3-C_1} \left| \begin{array}{ccc} a+x & b-a & c-a \\ a^2+x^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \\ a^3+x^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 1 \\ a^2+x^2 & b+a & c+a \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{array} \right| \stackrel{C_3:=C_3-C_2}{=} \\
 & = (b-a)(c-a) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & c-b \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & (c-b)(a+b+c) \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a)(c-b) \left| \begin{array}{ccc} a+x & 1 & 0 \\ a^2+x^2 & b+a & 1 \\ a^3+x^3 & b^2+ab+a^2 & a+b+c \end{array} \right| = \\
 & = (b-a)(c-a)(c-b)[(a+x)(a+b)(a+b+c) + a^3 + x^3 - \\
 & \quad - (a+x)(b^2+ab+a^2) - (a^2+x^2)(a+b+c)],
 \end{aligned}$$

de unde se obține că $f'(x) = (b-a)(c-a)(c-b)[3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + ac + bc]$.

Răspuns corect: c).

6. Cum $\sin x = \frac{1}{2}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $x = \frac{\pi}{6}$, de unde se obține că $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Răspuns corect: d).

7. Fie $A(a, a+1)$, $a \in \mathbb{R}$, atunci $B(3, a+1)$ și mijlocul segmentului (AB) este $M\left(\frac{3+a}{2}, a+1\right)$ care aparține dreptei $y = 2x - 2$, pentru că

$$a+1 = 2 \cdot \frac{3+a}{2} - 2.$$

Răspuns corect: d).

8. Aplicând Regula lui l' Hospital se obține

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 2x + 1}{1} = 6.$$

Răspuns corect: a).

9. Cum $f'(x) = 2e^x + 3$, rezultă că $f'(0) = 5$.

Răspuns corect: e).

10. Cum $f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, rezultă că $x = \frac{1}{4}$ este punctul de extrem local al lui f .

Răspuns corect: a).

11. Integrala din enunț poate fi scrisă

$$\int_7^{27} \frac{1}{x + \sqrt{2x - 5}} dx = \int_7^{27} \frac{1}{\sqrt{2x - 5} \left(\frac{x}{\sqrt{2x - 5}} + 1 \right)} dx.$$

Făcând schimbarea de variabilă $\sqrt{2x - 5} = t$, rezultă că $x = \frac{t^2 + 5}{2}$ și $\frac{1}{\sqrt{2x - 5}} dx = dt$, iar integrala devine

$$\begin{aligned} \int_3^7 \frac{1}{\frac{t^2 + 5}{2t} + 1} dt &= \int_3^7 \frac{2t}{t^2 + 2t + 5} dt = \int_3^7 \frac{2t + 2 - 2}{t^2 + 2t + 5} dt = \\ &= \int_3^7 \frac{2t + 2}{t^2 + 2t + 5} dt - 2 \int_3^7 \frac{1}{t^2 + 2t + 5} dt = \ln(t^2 + 2t + 5) \Big|_3^7 - 2 \int_3^7 \frac{1}{(t + 1)^2 + 4} dt = \\ &= \ln 68 - \ln 20 - \arctg \frac{t + 1}{2} \Big|_3^7 = \ln \frac{17}{5} - \arctg 4 + \arctg 2 = \\ &= \ln \frac{17}{5} - (\arctg 4 - \arctg 2) = \ln \frac{17}{5} - \arctg \frac{4 - 2}{1 + 4 \cdot 2} = \ln \frac{17}{5} - \arctg \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Răspuns corect: c).

12. Cum F este primitivă a lui f , rezultă că $F'(x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce este echivalent cu

$$-e^{-x}(a \cos 4x + b \sin 4x) + e^{-x}(-4a \sin 4x + 4b \cos 4x) = e^{-x} \cos 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}[(-a + 4b) \cos 4x - (4a + b) \sin 4x] = e^{-x} \cos 4x, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + 4b = 1 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{17} \\ b = \frac{4}{17} \end{cases}.$$

Răspuns corect: b).

Bibliografie

- [1] T. Bânzaru, N. Boja, O. Lipovan, A. Kovacs, G. Babescu, P. Găvruta, D. Rendi, I. Mihuț, D. Dăianu, D. Păunescu, C. Milici, R. Anghelescu, *Teste grilă de matematică pentru examenul de bacalaureat si admiterea în învățământul superior*, Editura Politehnica, 2010.
- [2] Gh. Cenușă, V. Burlacu, M. Covrig, B. Iftime, I. Mircea, C. Raischi, R. Șerban, O. Vegheș, *Admitere ASE București, Teste grilă și autoevaluare, 2005-2008*, Editura Cison, București.
- [3] *Gazeta Matematică*.
- [4] P. Găvruta, I. Goleț, D. Păunescu, C. Arieșanu, C. Lăzureanu, A. Gîrban, L. Cădariu, G. Țigan, A. Juratoni, C. Hedrea, O. Bundău, C. Petrișor, *Culegere de probleme pentru examenul de bacalaureat și admiterea în Universitatea Politehnica Timișoara*, Editura Politehnica Timișoara, 2013.
- [5] Gh. Gussi, O. Stănășilă, T. Stoica, *Matematică, Elemente de Analiză Matematică*, Manual pentru clasa a XI-a, Editura Didactică și Pedagogică, R.A. București, 1994.
- [6] D. V. Ionescu, *Complemente de Matematici pentru liceu*, Editura Didactică și Pedagogică, 1978.
- [7] C. Ionescu-Țiu, L. Pîrșan *Calcul diferențial și integral pentru admitere în facultate*, Editura Albatros, București, 1975.
- [8] *Manuale alternative de Matematică aprobate de Ministerul Educației Naționale*.
- [9] C. P. Nicolescu, *Analiză matematică. Aplicații*, Editura Albatros, 1987.
- [10] C. P. Nicolescu, *Teste de analiză matematică*, Editura Albatros, 1984.

- [11] I. Petrică, E. Constantinescu, D. Petre, *Probleme de Analiză Matematică*, Vol. 1 (clasa XI), Editura Petrion, 1993.
- [12] *Probleme date la olimpiade și concursuri de matematică.*
- [13] V. Radu, *Teme și probleme de matematică pentru Concursul "Traian Lalescu"*, caiete de studiu - clasa a XI-a, Editura Mirton, 1999.
- [14] *Variante Bacalaureat Matematică emise de Ministerul Educației Naționale.*