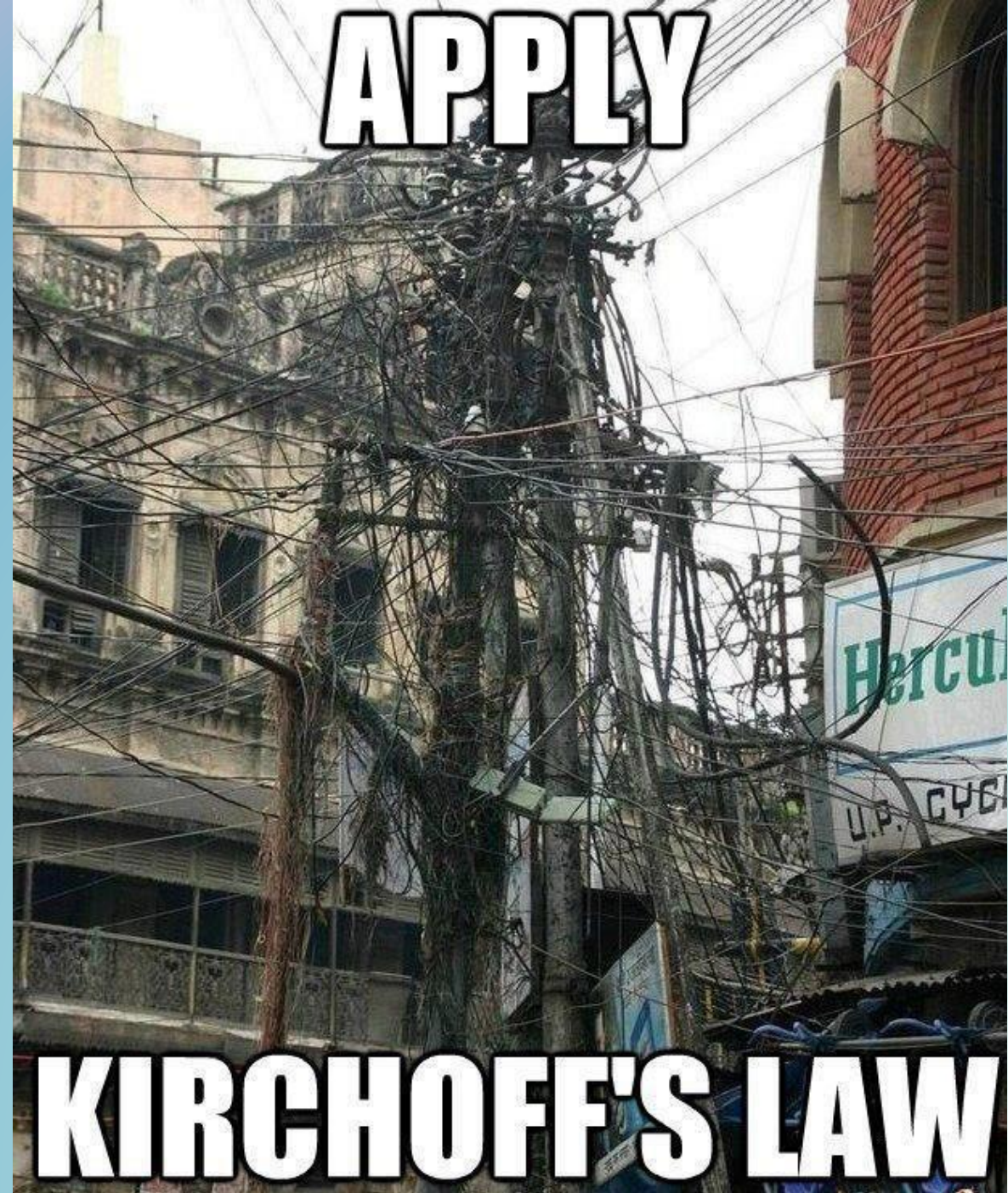


Teoremele

lui

Kirchhoff

Dorina Cucu, Lic. Teoretic "Gr. Moisil" Timișoara

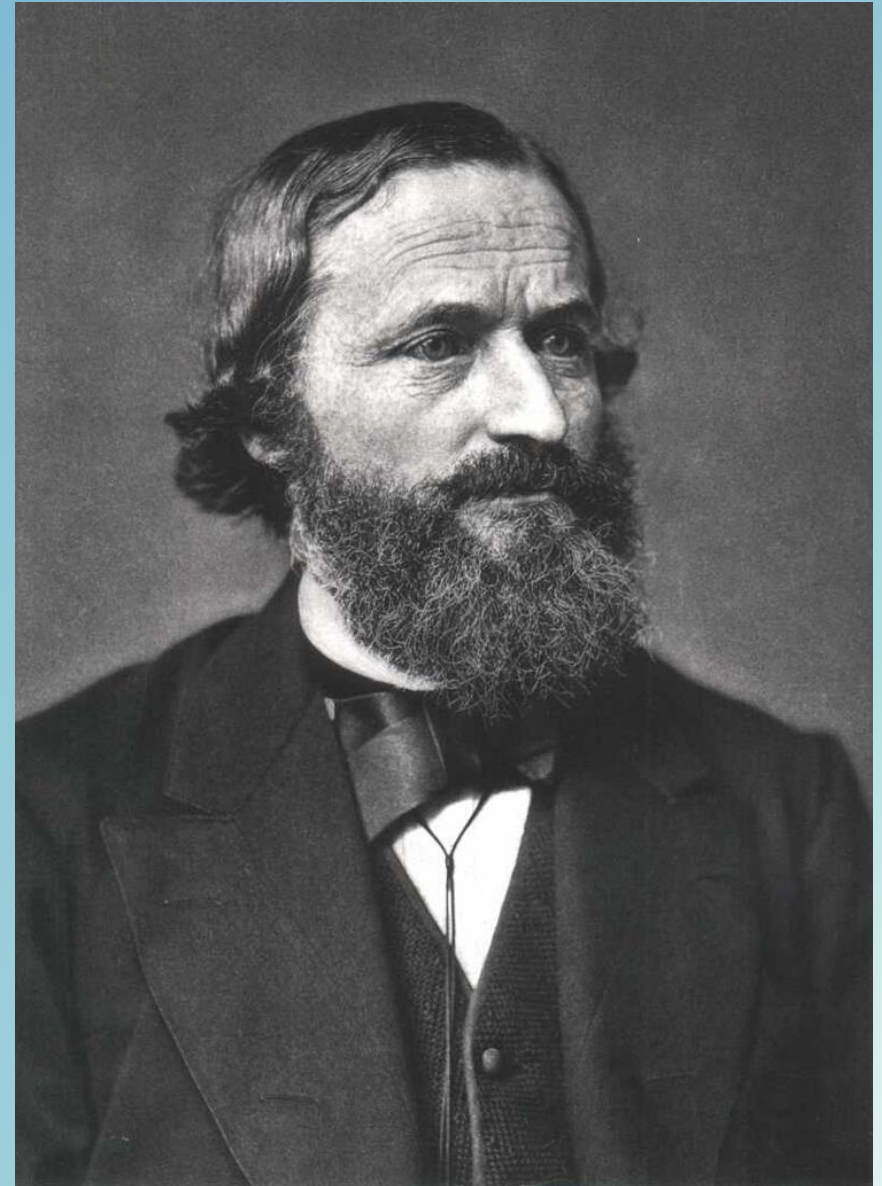


APPLY

KIRCHHOFF'S LAW

Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Fizician, astronom și inginer german,
având lucrări în domeniul
electricității, emisiei radiației și
spectroscopiei



Rețeaua electrică este un ansamblu de circuite interconectate.
Teoremele lui Kirchhoff se aplică rețelelor electrice.

Elementele unei rețele electrice (vezi figura alăturată)

- **Nodul de rețea** – este punctul în care se interconectează/se întâlnesc cel puțin trei conductoare

Ex. G și C sunt noduri; A, B,

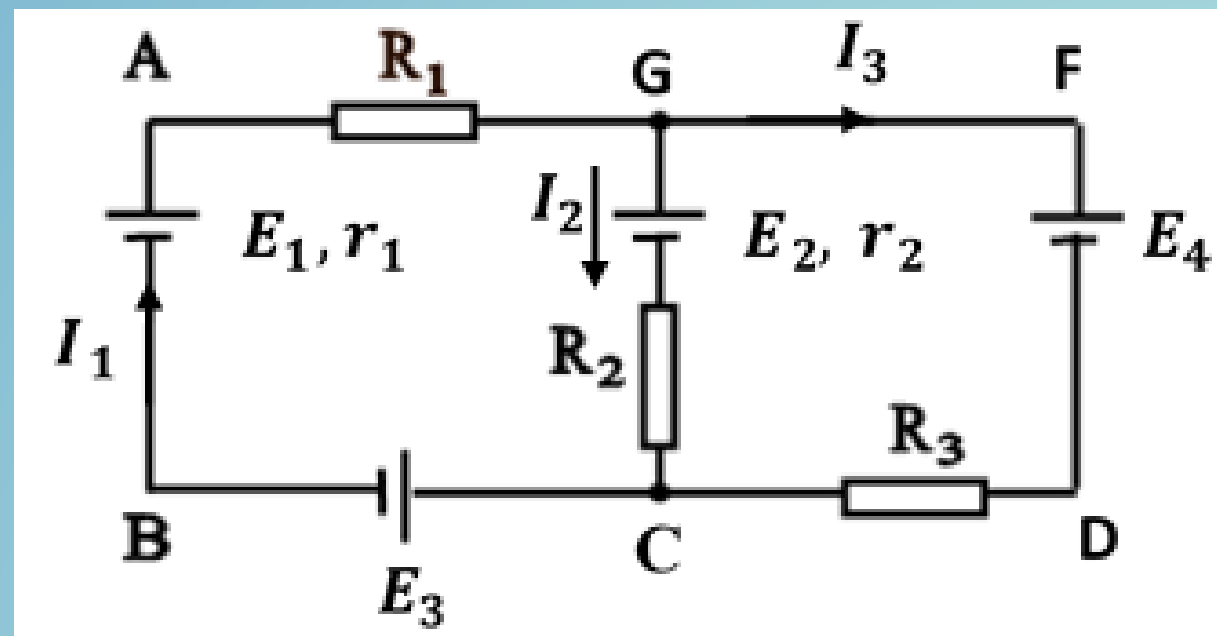
D și F nu sunt noduri

- **Latura (ramura) rețelei** este porțiunea din rețea cuprinsă între două noduri consecutive. Intensitatea curentului are aceeași valoare de-a lungul unei laturi. Latura nu conține noduri pe parcursul ei.

Ex. CBAG, GC, CDFG sunt laturi de rețea

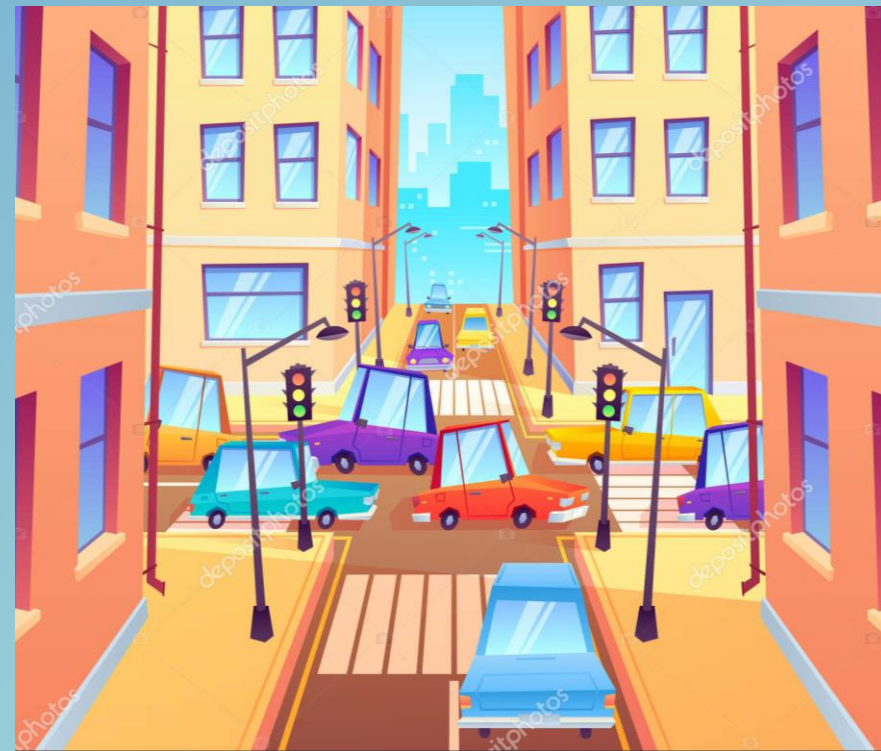
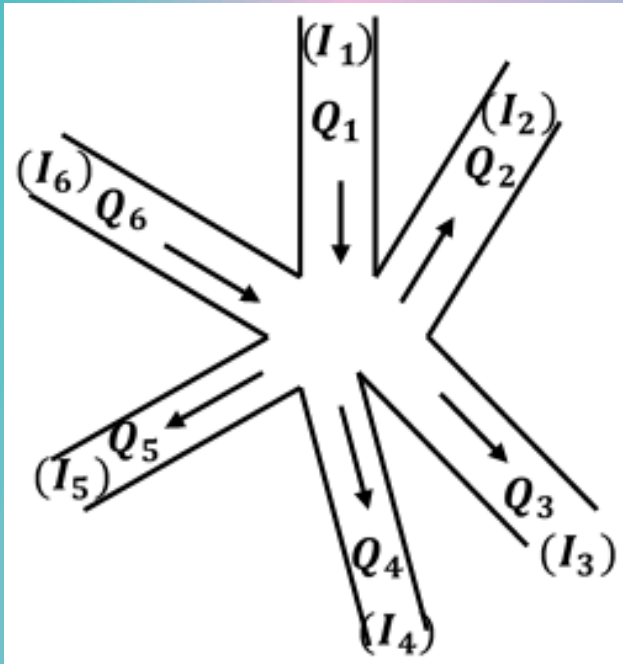
- **Ochiul de rețea** este conturul poligonal închis pe al cărui laturi sunt dispuse surse și consumatoare, conținând cel puțin două noduri.

Ex. ABCGA, CGFDC, ABDFA sunt ochiuri de rețea



Prima teoremă a lui Kirchhoff se aplică nodurilor de rețea. Ea este o consecință a conservării sarcinii electrice dintr-un nod de rețea.

La fel cum într-o intersecție numărul mașinilor care intră în intersecție este egal cu numărul mașinilor care o părăsesc, într-un nod de rețea nu se creează și nici nu dispare sarcină electrică, deci suma tuturor sarcinilor electrice dintr-un nod de rețea este nulă.



Exemplu: aplicăm pentru nodul din figura alăturată conservarea sarcinii electrice, considerând, prin convenție, semnul "+" pentru sarcina care "intră" în nod și cu semnul "-" pentru sarcina care "părăsește" nodul:

$$Q_1 + Q_6 - Q_2 - Q_3 - Q_4 - Q_5 = 0 \quad (1)$$

Împărțind fiecare termen al relației (1) la Δt , și, ținând cont că $I = \frac{Q}{\Delta t}$, rezultă:

$$I_1 + I_6 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0 \quad (2)$$

Relația (2) se poate rescrie

$$I_1 + I_6 = I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad (3)$$

Rezultă, pentru prima teoremă, următorul enunț:

Suma intensităților curenților electrici care intră într-un nod de rețea este egală cu suma intensităților curenților electrici care ies din acel nod.

Dacă se are în vedere relația $I_1 + I_6 - I_2 - I_3 - I_4 - I_5 = 0$ (2), enunțul teoremei este:

Suma algebrică a intensităților curenților electrici care se întâlnesc într-un nod de rețea este egală cu zero.

Prin sumă algebrică se înțelege suma unor mărimi de același tip, sumă în care se ține cont de semnul acelor mărimi.

Prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff la o rețea cu un număr n de noduri, se obțin $n-1$ ecuații independente.

A doua teoremă a lui Kirchhoff se aplică ochiurilor de rețea. Ea este o consecință a conservării energiei electrice într-un ochi de rețea.

A doua teoremă a lui Kirchhoff este o generalizare a legii lui Ohm pentru un circuit simplu, lege care exprimă faptul că într-un circuit simplu energia se conservă:

$I = \frac{E}{R+r} \Rightarrow E = I \cdot (R + r) = U + u \Rightarrow q \cdot E = q \cdot U + q \cdot u$, adică energia furnizată de sursă ($q \cdot E$) este suma energiilor preluate de circuitul exterior ($q \cdot U$) și de circuitul interior ($q \cdot u$).

Prin generalizarea legii lui Ohm ($E = U + u$), enunțul teoremei devine:

Suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale surselor dintr-un ochi de rețea este egală cu suma algebrică a căderilor de tensiune de pe fiecare latură a aceluși ochi de rețea.

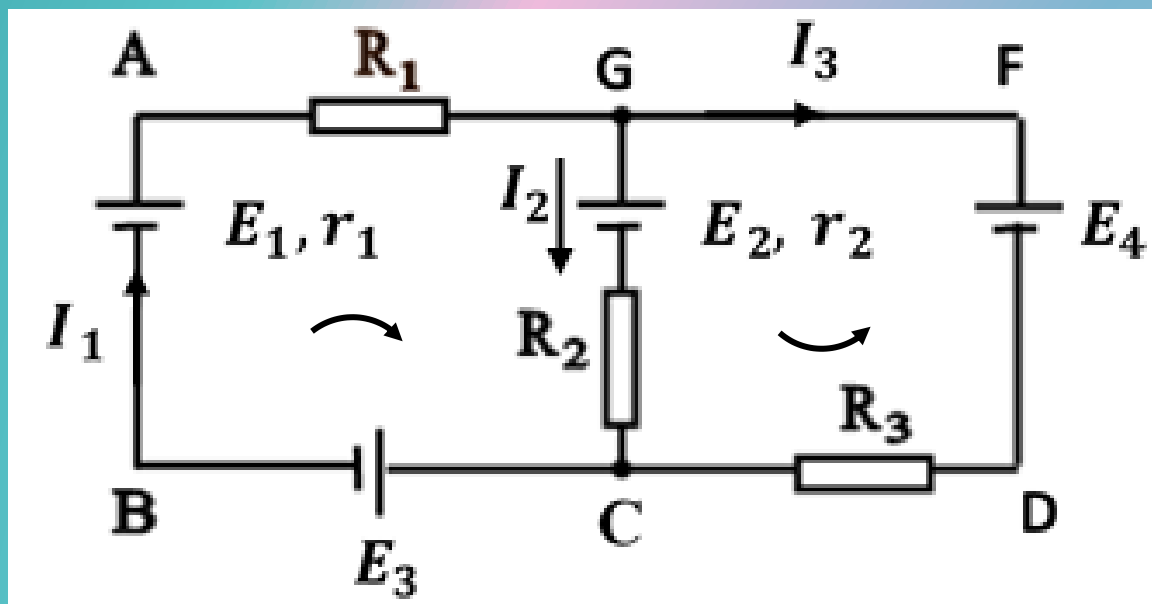
Pentru aplicarea celei de-a doua teoreme a lui Kirchhoff, se parcurg următoarele etape:

- Se stabilește, arbitrar (sens orar sau sens antiorar), un sens de parcurgere a ochiului de rețea
- Se stabilesc semnele pentru tensiunile electromotoare ale surselor și pentru căderile de tensiune de pe laturile rețelei:

* t.e.m. Se consideră pozitivă dacă sensul de parcurgere ales trece prin sursă de la borna "−" la borna "+", în caz contrar, t.e.m. fiind negativă

* căderea de tensiune pe o latură ($U = I \cdot R_t$, R_t fiind rezistența totală a laturii) este considerată pozitivă, dacă sensul curentului din latură coincide cu sensul de parcurgere ales, în caz contrar căderea de tensiune fiind negativă.

Pentru o rețea care conține un număr ℓ de laturi, cea de-a doua teoremă a lui Kirchhoff se aplică numai ochiurilor independente (ochiuri ce conțin cel puțin o latură care nu aparține altor ochiuri), rezultând un număr $\ell - (n - 1)$ de ecuații independente.



Pentru rețeaua reprezentată în figura de mai jos, rețea care conține 2 noduri și două ochiuri independente:

Aplicarea primei teoreme în nodul G conduce la relația:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (4)$$

Observați că aplicarea primei teoreme în nodul C conduce la același rezultat.

Aplicarea celei de-a doua teoreme în ochiul AGCBA conduce la:

$$E_1 - E_2 - E_3 = I_1 \cdot (R_1 + r_1) + I_2 \cdot (R_2 + r_2) \quad (5)$$

Iar pentru ochiul GFDCG:

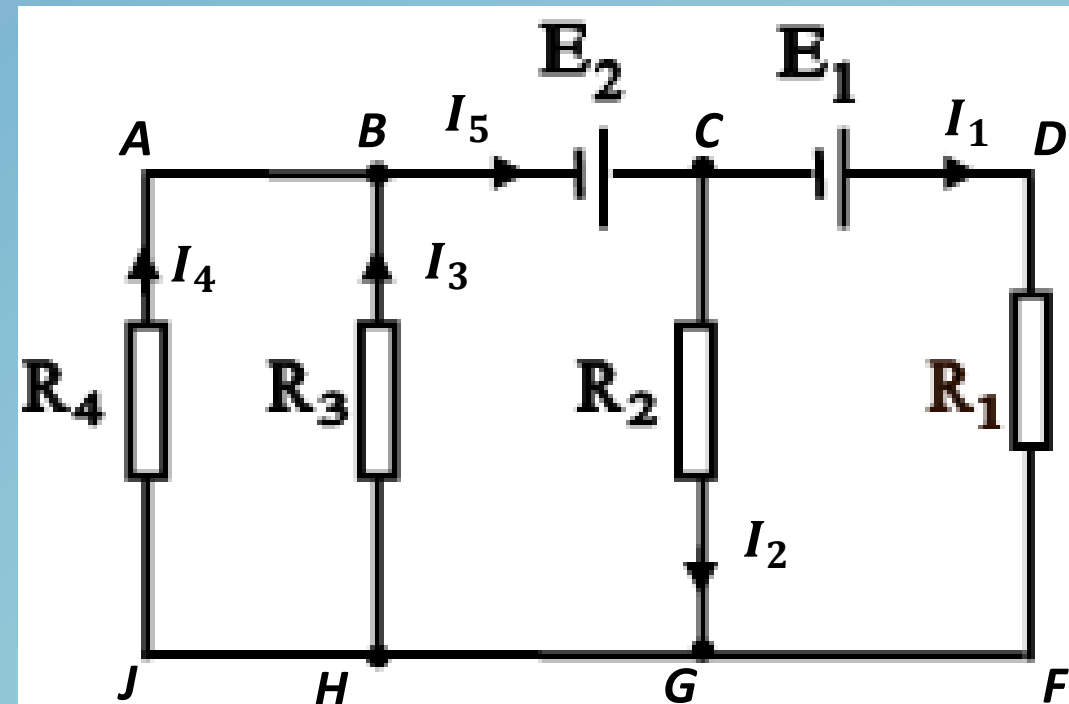
$$E_4 - E_2 = -I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot (R_2 + r_2) \quad (6)$$

Dacă necunoscutele sunt curenții I_1, I_2, I_3 , prin rezolvarea sistemului format din ecuațiile (4), (5) și (6), aceși curenți pot fi determinați.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ



În circuitul din figură se cunosc $R_1 = R_3 = 1\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 2\ \Omega$ și t.e.m. a primei surse $E_1 = 2\text{ V}$. Tensiunea la bornele rezistorului R_4 este $U_4 = 2\text{ V}$. Se consideră neglijabile rezistențele interne ale surselor. Săgețile indică sensurile curenților din ramuri. Determinați: a. Intensitățile curenților din fiecare ramură; b. t.e.m. a celei de-a doua surse.



REZOLVARE

❖ Rețeaua conține 4 noduri, deci se pot obține 3 ecuații independente prin aplicarea primei teoreme:

În nodul B: $I_4 + I_3 = I_5$ (1)

În nodul C: $I_5 = I_1 + I_2$ (2)

În nodul G: $I_3 + I_4 = I_1 + I_2$ (3) – am ținut cont de faptul că pe latura HG neexistând consumatoare, căderea de tensiune este nulă, ceea ce are ca rezultat egalitatea între potențialele electrice ale punctelor H și G ("e ca și cum" H ar coincide cu G)

❖ Pentru aplicarea celei de-a doua teoreme, alegem un sens de parcurs al celor trei ochiuri independente din rețea (am ales sensul orar – vezi figura alăturată)

❖ Aplicăm teorema a doua în ochiul:

- **ABHJA**: $0 = -I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4$ (4) – relația exprimă faptul că tensiunile pe laturile AJ și BH sunt egale

- **BCGHB**: $E_2 = I_3 \cdot R_3 + I_2 \cdot R_2$ (5)

- **CDFGC**: $E_1 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2$ (6)

❖ Calculăm intensitatea curentului prin rezistorul R_4 :

$$U_4 = I_4 \cdot R_4 \Rightarrow I_4 = 1 \text{ A} \quad (7)$$

❖ Înlocuim valorile t.e.m. și rezistențelor în relațiile (4), (5) și (6). Se obține următorul sistem de ecuații:

$$0 = -I_3 + 2I_4 \Rightarrow I_3 = 2I_4 \Rightarrow I_3 = 2 \text{ A} \quad (4)$$

$$E_2 = I_3 + 2I_2 \quad (5)$$

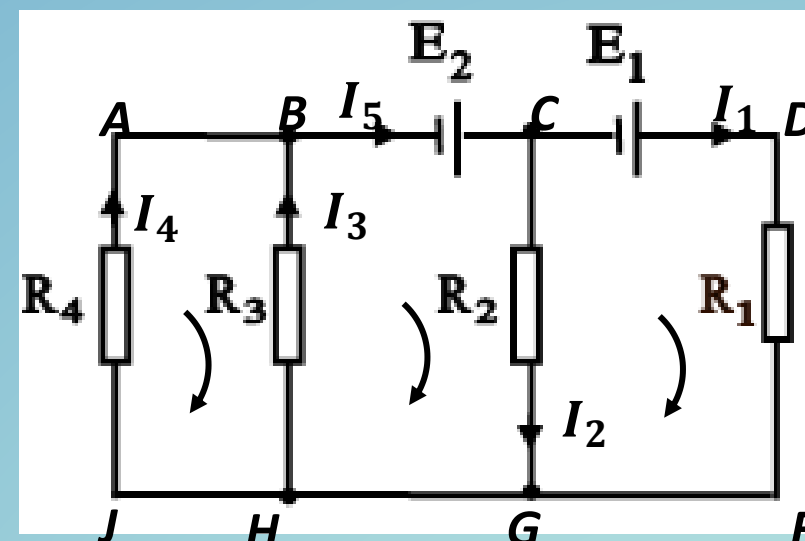
$$2 = I_1 - 2I_2 \quad (6)$$

Din $I_4 + I_3 = I_5$ (1) și $I_5 = I_1 + I_2$ (2) $\Rightarrow I_3 + I_4 = I_1 + I_2$

Din (4) și (7) $\Rightarrow 3 = I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 = 3 - I_2$

Înlocuind I_1 în (6), se obține:

$2 = 3 - I_2 - 2I_2$, deci $I_2 = \frac{1}{3} \text{ A}$ și $I_1 = \frac{8}{3} \text{ A}$



Intensitățile curenților sunt:

$$I_1 = \frac{8}{3} \text{ A}, I_2 = \frac{1}{3} \text{ A}, I_3 = 2 \text{ A},$$

$$I_4 = 1 \text{ A}, I_5 = I_1 + I_2 = 3 \text{ A}$$

$$\text{Din (5)} \Rightarrow E_2 = \frac{8}{3} \text{ V}$$