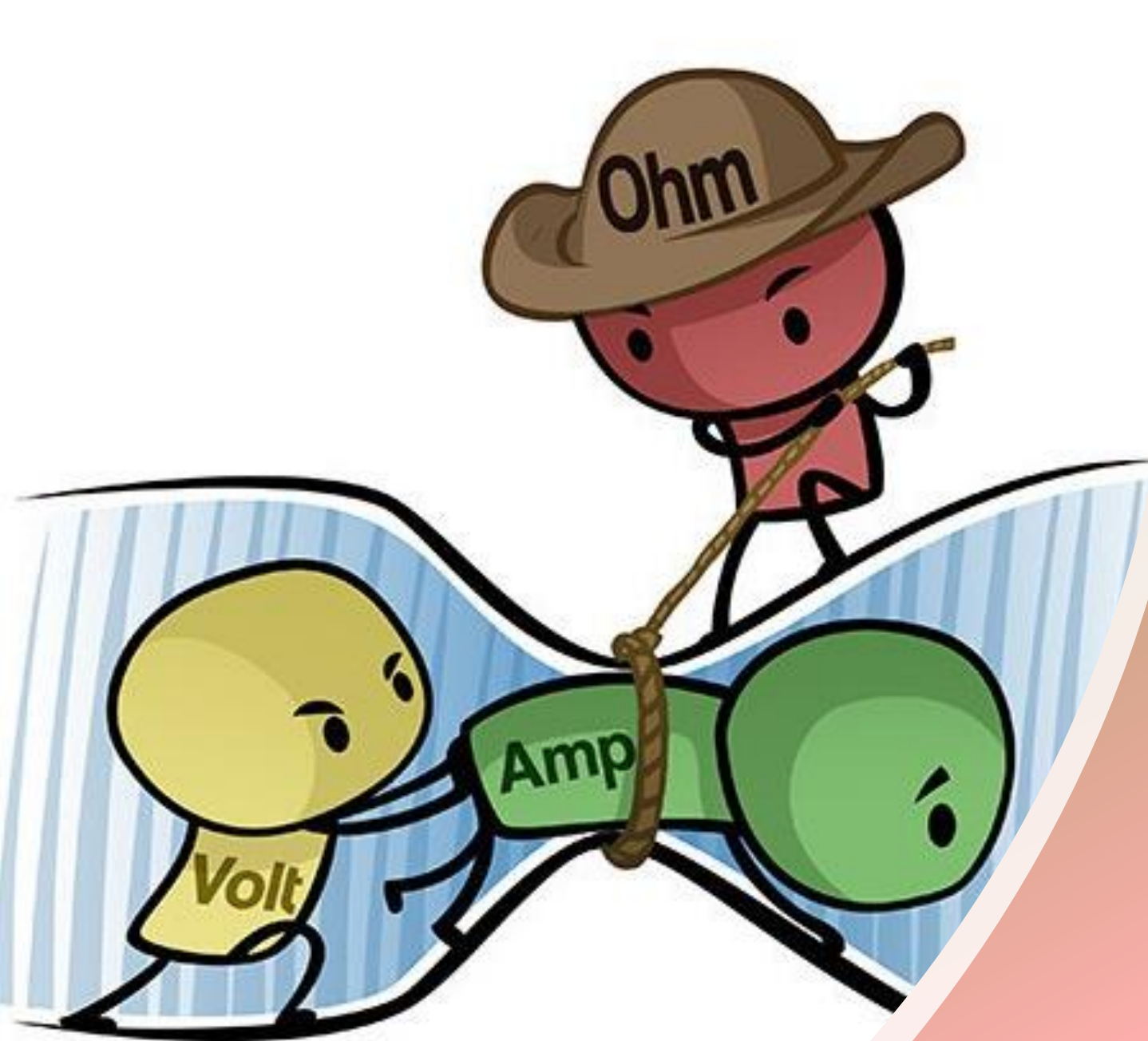




Aplicații ale legilor lui Kirchhoff

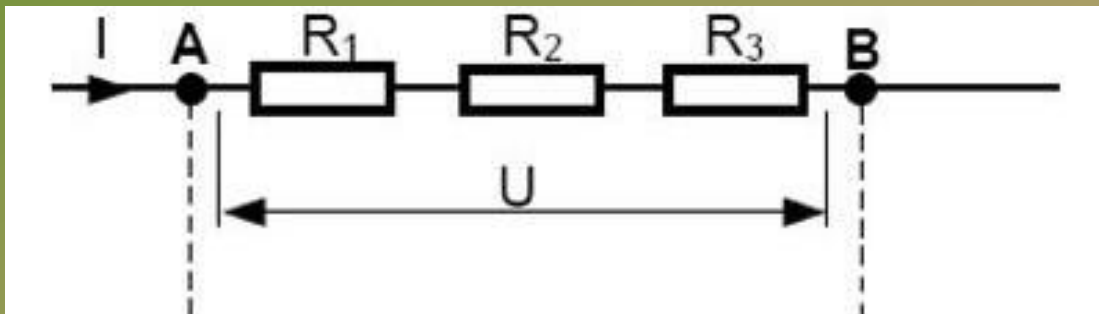
1. Gruparea rezistoarelor

Gruparea rezistoarelor se realizează atunci când se dorește obținerea unor rezistențe de valori diferite față de rezistențele de care dispunem.

Rezistența echivalentă a unei grupări de rezistoare este rezistența electrică a unui rezistor, care, conectat la aceeași tensiune ca și gruparea, este parcursă de același curent ca și gruparea. Cu alte cuvinte, efectul în circuit al rezistenței echivalente este același cu efectul grupării conectate între aceleași borne ca și rezistorul echivalent.

1a. Gruparea serie a rezistoarelor

Gruparea serie



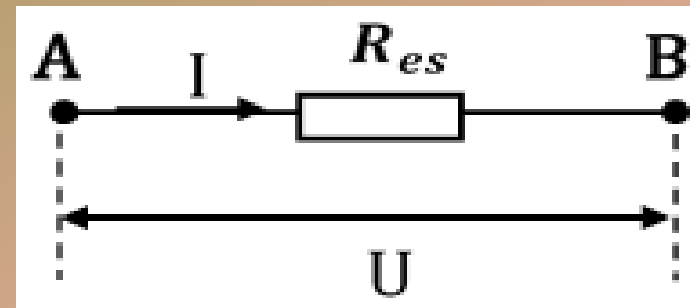
Pentru gruparea serie, aplicăm legea lui Ohm pe porțiunea AB de circuit, având în vedere că fiecare rezistor e parcurs de același curent și că diferența de potențial (tensiunea) dintre punctele A și B este egală cu suma tensiunilor la bornele fiecărui rezistor din grupare:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 \quad (1.1)$$

Pentru rezistorul echivalent, aplicăm legea lui Ohm pe porțiunea AB de circuit:

$$U = IR_{es} \quad (1.2)$$

Rezistorul echivalent



Din relațiile (1.1) și (1.2) rezultă, prin identificare

$$R_{es} = R_1 + R_2 + R_3 \quad (1.3)$$

Prin generalizare, pentru n rezistoare legate în serie, se obține:

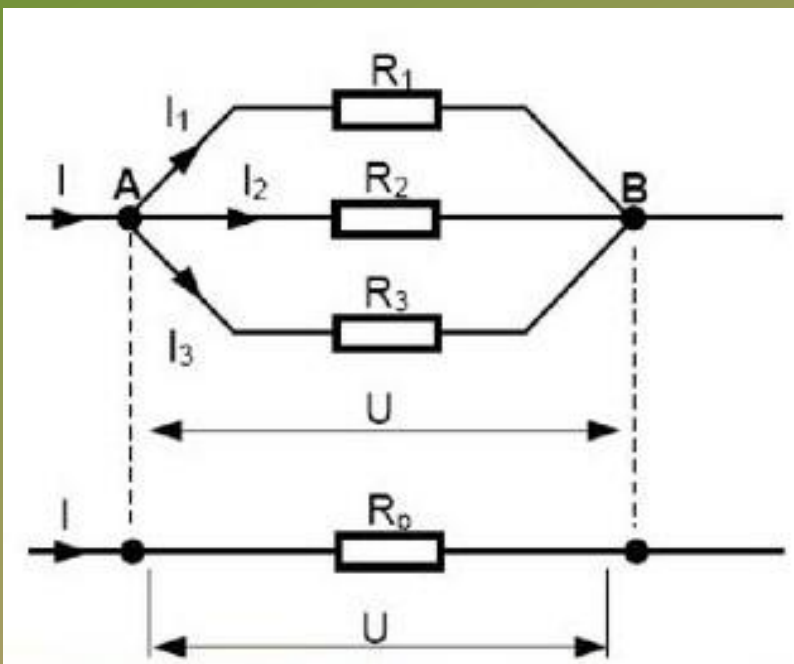
$$R_{es} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i$$

Pentru n rezistoare identice, fiecare având rezistența R , grupate în serie, se poate scrie:

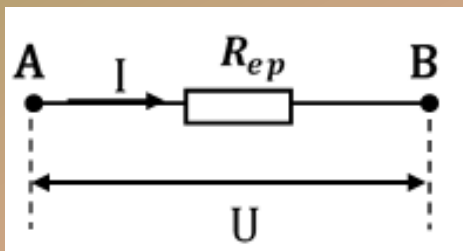
$$R_{es} = nR$$

1b. Gruparea în paralel (derivație) a rezistoarelor

Gruparea în paralel



Rezistorul echivalent



Pentru gruparea în paralel, aplicăm prima teoremă a lui Kirchhoff în nodul A:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (1.4)$$

Apoi aplicăm pe fiecare dintre cele trei ramuri (vezi figura alăturată) legea lui Ohm, având în vedere că fiecare rezistor este legat între aceleași borne, deci are aceeași tensiune între bornele sale:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}; I_2 = \frac{U_2}{R_2}; I_3 = \frac{U_3}{R_3} \quad (1.5)$$

Pentru rezistorul echivalent, aplicăm legea lui Ohm pe porțiunea AB de circuit:

$$U = IR_{ep} \quad (1.6)$$

Din relațiile (1.4), (1.5) și (1.6) rezultă, prin identificare:

$$\frac{1}{R_{ep}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Prin generalizare, pentru n rezistoare legate în paralel, se obține:

$$\frac{1}{R_{ep}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

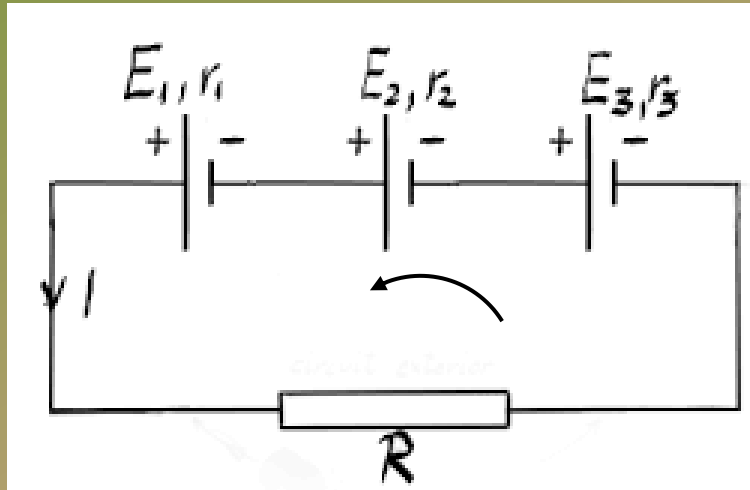
Pentru n rezistoare identice, fiecare având rezistența R , grupate în paralel, se poate scrie:

$$R_{ep} = \frac{R}{n}$$

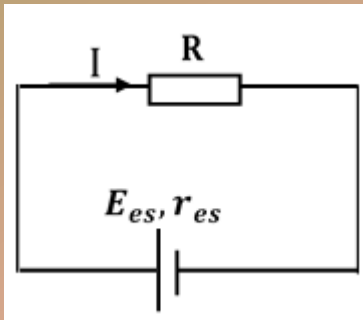
2. Gruparea surselor/generatoarelor

Generatorul (sursa) echivalent (ă) pentru o grupare de generatoare este generatorul care, cuplat la același rezistor (consumator) ca și gruparea, debitează același curent electric ca și gruparea.

2a. Gruparea serie a generatoarelor



sursa
echivalentă



Pentru gruparea serie, aplicăm teorema a doua a lui Kirchhoff, considerând circuitul un ochi de rețea:

$$E_1 + E_2 + E_3 = I(R + r_1 + r_2 + r_3) \quad (2.1)$$

Pentru sursa echivalentă aplicăm legea lui Ohm pentru un circuit simplu:

$$E_{es} = I(R + r_{es}) \quad (2.2)$$

Făcând identificările în relațiile (2.1) și (2.2), se obține:

$$E_{es} = E_1 + E_2 + E_3 \quad \text{și} \quad r_{es} = r_1 + r_2 + r_3$$

Pentru gruparea în paralel, aplicăm prima teoremă a lui Kirchhoff în oricare dintre cele două noduri ale rețelei:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \quad (2.3)$$

Apoi aplicăm a doua teoremă a lui Kirchhoff:

- pe ochiul AE_1BRA : $E_1 = I_1 r_1 + IR \quad (2.4)$

- pe ochiul AE_2BRA : $E_2 = I_2 r_2 + IR \quad (2.5)$

- pe ochiul AE_3BRA : $E_3 = I_3 r_3 + IR \quad (2.6)$

Din relațiile (2.4), (2.5) și (2.6) exprimăm intensitățile curenților I_1, I_2 și I_3 , apoi le înlocuim în relația (2.3). Se obține:

$$I = \frac{E_1 - IR}{r_1} + \frac{E_2 - IR}{r_2} + \frac{E_3 - IR}{r_3} \Rightarrow I = \frac{\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{E_3}{r_3}}{1 + \frac{R}{r_{ep}}} \quad (2.6)$$

În relația (2.6) prin r_{ep} am notat rezistența internă echivalentă a celor trei rezistențe interne ale surselor.

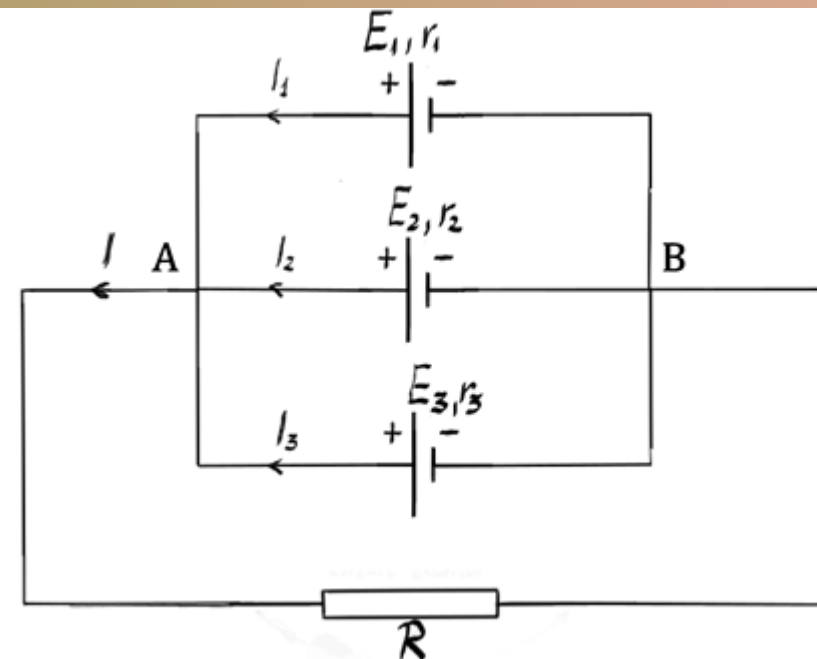
$$\frac{1}{r_{ep}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \quad (2.7)$$

Pentru sursa echivalentă, aplicăm legea lui Ohm pentru un circuit simplu:

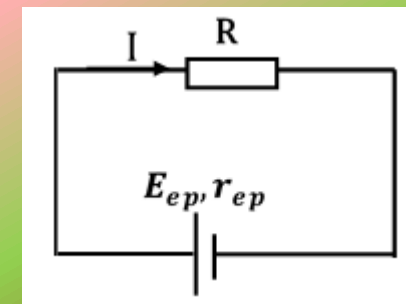
$$E_{ep} = I(r_{ep} + R) \Rightarrow I = \frac{\frac{E_{ep}}{r_{ep}}}{1 + \frac{R}{r_{ep}}} \Rightarrow \text{prin identificare cu termenii din (2.6)}$$

$$E_{ep} = r_{ep} \left(\frac{E_1}{r_1} + \frac{E_2}{r_2} + \frac{E_3}{r_3} \right) \quad (2.8)$$

2a. Gruparea în paralel a generatoarelor



sursa
echivalentă



Caz particular

Pentru n surse identice, fiecare având parametrii E și r , parametrii sursei echivalente sunt:

- La **gruparea serie** a surselor:

Folosind relațiile (2.1) și (2.2), rezultă:

$$E_{es} = nE \quad \text{și} \quad r_{es} = nr \quad (2.9)$$

- La **gruparea surselor în paralel**:

Folosind relațiile (2.7) și (2.8), rezultă:

$$E_{ep} = E \quad \text{și} \quad r_{ep} = \frac{r}{n} \quad (2.10)$$

Probleme rezolvate



1. Aflați rezistența echivalentă între punctele A și B pentru gruparea reprezentată în figura alăturată. Se cunoaște $R = 32 \Omega$.

Rezovare

Dacă legăm o sursă de tensiune între punctele A și B, aceste puncte devin noduri de rețea. Rezistoarele de pe o latură sunt grupate în serie, pentru că latura nu conține noduri. Astfel, pentru latura ADC putem scrie:

$$R_{ADC} = R + 3R = 4R = 128 \Omega$$

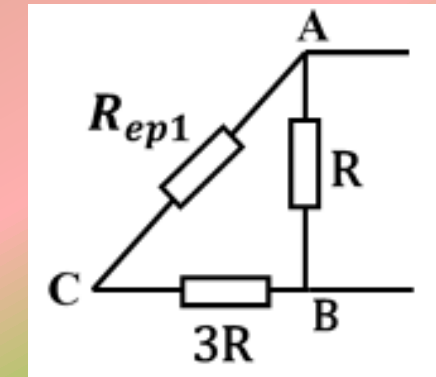
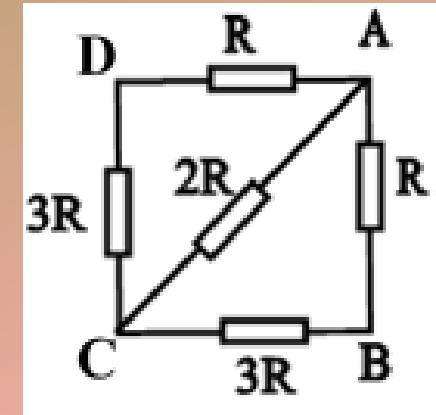
Latura AC, fiind conectată între aceleași puncte ca și latura ADC, va avea aceeași tensiune la borne, deci, cele două laturi sunt legate în paralel. Rezistența lor echivalentă este:

$$\frac{1}{R_{ep1}} = \frac{1}{R_{ADC}} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{4R} \Rightarrow R_{ep1} = \frac{4R}{3} = \frac{128}{3} \Omega$$

Pe latura ACB (vezi a doua figură) nu există noduri, deci : $R_{ACB} = R_{ep1} + 3R = \frac{13R}{3}$

Înlocuind rezistențele R_{ep1} și $3R$ cu R_{ACB} , mai rămân două rezistoare grupate în paralel:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_{ACB}} + \frac{1}{R} = \frac{16}{13R} \Rightarrow R_{AB} = \frac{13R}{16} = 26 \Omega$$



2. În circuitul din figura alăturată sursele sunt identice, iar rezistoarele au aceeași rezistență electrică $R = 4 \Omega$. Ampermetrul (considerat ideal) indică un curent $I_1 = 1 A$ dacă întrerupătorul K este deschis, respectiv $I_2 = 1,5 A$ dacă întrerupătorul K este închis. Determinați t.e.m. (E) și rezistența internă (r) a unei surse.

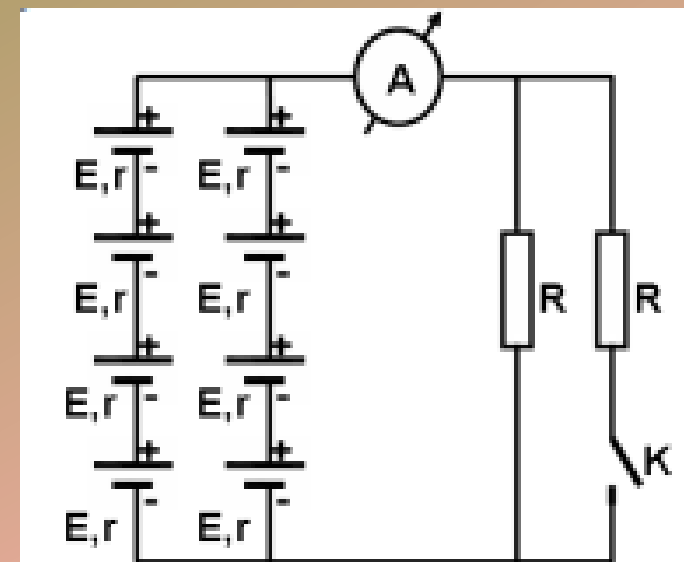
Rezovare

- Circuitul conține două laturi legate în paralel, fiecare latură având 4 surse legate în serie.
- Calculăm parametrii sursei echivalente. Folosind relația (2.9), obținem $E_{es} = nE = 4E$ și $r_{es} = nr = 4r$. Cele două surse cu parametrii E_{es} și r_{es} sunt legate în paralel.
- Determinăm parametrii E_{ep} și r_{ep} ai sursei echivalente, având în vedere relația (2.10):

$$E_{ep} = E_{es} = 4E \quad \text{și} \quad r_{ep} = \frac{r_{es}}{2} = 2r$$

- Dacă întrerupătorul este deschis, în circuit apare un singur rezistor R și, aplicând legea lui Ohm pentru un circuit simplu (format din sursa cu parametrii E_{ep} și r_{ep} și rezistorul R), putem scrie:

$$I_1 = \frac{E_{ep}}{R + r_{ep}} = \frac{4E}{R + 2r} \quad (*)$$



- Dacă întrerupătorul este închis, în circuit există două rezistoare R grupate în paralel și având rezistența echivalentă $R_{ep} = \frac{R}{2}$.
- Aplicând legea lui Ohm pentru un circuit simplu (format din sursa cu parametrii E_{ep} și r_{ep} , putem scrie:

$$I_2 = \frac{E_{ep}}{R_{ep} + r_{ep}} = \frac{4E}{\left(\frac{R}{2}\right) + r} \quad (**)$$

- Din relațiile (*) și (**), prin egalarea termenilor $4E$, se obține:

$$r = \frac{R(2I_1 - I_2)}{4(I_2 - I_1)} = 1 \, \Omega$$

- Din relația (*), se calculează E :

$$E = \frac{I_1(R + 2r)}{4} = 1,5 \, V$$

Surse de informare

- ❑ C. Mantea, M. Garabet, *Manual de Fizică pentru clasa a X-a*, Ed. All 2000, 2005
- ❑ B. Arsenov, S. Arsenov, S. Biriș, C. Major, A. Ștefan, *Probleme de Fizică pentru clasa a X-a*, Ed. Fundației "Moise Nicoară", 2010
- ❑ <https://lectii-virtuale.ro/teorie/gruparea-generatoroarelor-metoda-superpozitiei>
- ❑ <https://slideplayer.gr/slide/14058498/>

