Inspectoratul Școlar Județean Timiș Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
5.02.2026

Clasa a X-a
Barem de corectare și notare

1. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f: \mathbb{R} \to [a, b]$, $f(x) = \frac{x}{x^2-x+1}$ este surjectivă, determinați lungimea intervalului $[a, b]$.

Soluție:

Dacă f este surjectivă atunci $Imf = [a, b]$ 5p

$Imf = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R} \ a.î. f(x) = y \} =$

$= \left\{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R} \ a.î. \ \dfrac{x}{x^2 - x + 1} = y \right\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R} \ a.î. \ x^2 y - x(y + 1) + y = 0\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R} \ a.î. \ x^2 y - x(y + 1) + y = 0\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} | \Delta = (y + 1)^2 - 4y^2 \geq 0\} =$

$= \{y \in \mathbb{R} | \Delta = -3y^2 + 2y + 1 \geq 0\} =$

$= \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$..10p

Lungimea intervalului $[a, b] = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$ este $\frac{4}{3}$...5p

2. a) Să se arate că dacă $t > 0$ atunci $\sqrt{\frac{2}{t+2}} + \sqrt{\frac{t}{t+2}} \leq \sqrt{\frac{t^2+4}{2t}}$.

b) Să se arate că pentru oricare două numere reale a, b din intervalul $(0,1)$ sau $(1, \infty)$

are loc inegalitatea $\frac{1}{\sqrt{1+log_a\sqrt{b}}} + \frac{1}{\sqrt{1+log_b a^2}} \leq \sqrt{log_a\sqrt{b} + log_b a^2}$.

Soluție:

a) Din inegalitatea $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ $\forall a, b > 0$ se obține că

$$\sqrt{\frac{2}{t+2}} + \sqrt{\frac{t}{t+2}} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{\frac{2}{t+2}+\frac{t}{t+2}}{2}} = \sqrt{2} \quad (1)$$

Din inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geq 2$ $\forall a > 0$ se obține că

$\frac{t^2+4}{2t} = \frac{t}{2} + \frac{2}{t} \geq 2$ $\forall t > 0$, deci $\sqrt{\frac{t^2+4}{2t}} \geq \sqrt{2}$ $\forall t > 0$ (2)

Obține una din inegalitățile de mai sus 5p

Obține cealaltă inegalitate și conform tranzitivității relației de inegalitate, obține inegalitatea cerută 5p

b) Notăm $log_a b = t$, deoarece $a, b \in (0,1)$ sau $a, b \in (1, \infty)$ avem $t > 0$ ……….

Din notație se obține $log_a\sqrt{b} = \frac{1}{2}log_a b = \frac{t}{2}$ și $log_b a^2 = 2log_b a = \frac{2}{log_a b} = \frac{2}{t}$ ……...5p

Cu această notație inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}} \leq \sqrt{\frac{t}{2} + \frac{2}{t}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{t+2}} + \sqrt{\frac{t}{t+2}} \leq \sqrt{\frac{t^2+4}{2t}}$ adevărată din a) 5p

3. a) Dacă $a, b \in \mathbb{Q}$, atunci $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q} \iff a = b = 0$.

b) Să se arate că există o infinitate de numere întregi a, b, c astfel încât:

$$(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3)(a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c) \in \mathbb{Z}.$$

Soluție:

a) Notăm $x = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2}$.

Dacă $a = b = 0$ rezultă evident că $x = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} = 0 \in \mathbb{Q}$.
Demonstrăm și reciproca, adică dacă $x = a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ atunci $a = b = 0$: ……….…….2p

$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^2(\sqrt[3]{4})^2 + 2ab\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2} + b^2(\sqrt[3]{2})^2 = 2a^2\sqrt[3]{2} + 4ab + b^2\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$
Dar $a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow 4ab \in \mathbb{Q}$ deci $2a^2\sqrt[3]{2} + b^2\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}$ și deci
$a\left(2a^2\sqrt[3]{2} + b^2\sqrt[3]{4}\right) = 2a^3\sqrt[3]{2} + ab^2\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}$ **(1)**

$x \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow b^2x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow b^2\left(a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2}\right) = ab^2\sqrt[3]{4} + b^3\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ **(2)**

Din (1) și (2) obținem că diferența celor două numere este din $\mathbb{Q}$ adică
$(b^3 - 2a^3)\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q}$ ……………………………………………………………….……..5p

Deoarece $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ și $(b^3 - 2a^3) \in \mathbb{Q}$ obținem că $b^3 - 2a^3 = 0$.
Dacă $a \neq 0$, atunci din egalitatea precedent se obține $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = 2 \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$, contradicție.
Deci $a = 0$ și deci și $b = 0$. 3p

b) Se dezvoltă produsul și se grupează termenii:
$\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3\right)\left(a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c\right) =$
$= a \cdot 2\sqrt[3]{2} + b \cdot 2 + c\sqrt[3]{4} + a \cdot 2 + b\sqrt[3]{4} + c\sqrt[3]{2} + 3a\sqrt[3]{4} + 3b\sqrt[3]{2} + 3c.$
$= \sqrt[3]{4}(3a + b + c) + \sqrt[3]{2}(2a + 3b + c) + (2a + 2b + 3c)$ ……………………………..…….5p
Pentru ca expresia să fie un număr întreg, coeficienții radicalilor trebuie să fie zero:
$$\begin{cases} 3a + b + c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$$
Scăzând ecuațiile se obține:
$a - 2b = 0 \Rightarrow a = 2b.$
Înlocuind se obține:
$3(2b) + b + c = 0 \Rightarrow c = -7b.$
Pentru $b = k \in \mathbb{Z}$, obținem: $a = 2k, b = k, c = -7k$ ……………………..………………..…3p

Deci există deci o infinitate de astfel de triplete de numere întregi a, b, c astfel încât:
$\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 3\right)\left(a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c\right) \in \mathbb{Z}$ ... ...…………………………….……………………...2p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timişoara,
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683
registratura@isjtm.ro , www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818

4. Fie numerele complexe $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și punctele A_1, A_2, A_3 având afixele z_1, z_2 și respectiv z_3.

a) Dacă H este punctul de afix $z_1 + z_2 + z_3$ să se arate că H este ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$.

b) Știind că $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, să se calculeze $\frac{1}{z_1^{2025}} + \frac{1}{z_2^{2025}} + \frac{1}{z_3^{2025}}$.

c) Știind că $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ determinați $|z_1 + z_2 + z_3|$.

Soluție:

a) Din $|z_k| = 1$ obținem că $\overline{z_k} = \frac{1}{z_k}$ ……………………………………………………2p

Demonstrăm că $A_1H \perp A_2A_3 \Leftrightarrow \frac{z_H - z_1}{z_2 - z_3} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_3}\right)} = -\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_3}$ 2p

$$\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3}$$

$\overline{\left(\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_3}\right)} = \overline{\left(\frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3}\right)} = \frac{\overline{z_2} + \overline{z_3}}{\overline{z_2} - \overline{z_3}} = \frac{\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}}{\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}} = -\frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3} = -\frac{z_H - z_1}{z_2 - z_3} \Rightarrow A_1H \perp A_2A_3$ (1)...…….....5p

Analog se arată că $A_2H \perp A_1A_3$. (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow H$ este ortocentrul triunghiului $A_1A_2A_3$. ………………………………1p

b) Din $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ obținem că $|z_H| = 1$ și cum $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ deducem că punctele A_1, A_2, A_3, H sunt pe un cerc de centru O și rază 1. Deci H coincide cu unul din vîrfurile triunghiului $A_1A_2A_3$ adică triunghiul este dreptunghic …………………….........5p

Presupunem că unghiul drept este în $A_1 \Rightarrow z_2 + z_3 = 0 \Rightarrow z_2 = -z_3$ și cum $z_1 = 1$

Se obține $\frac{1}{z_1^{2025}} + \frac{1}{z_2^{2025}} + \frac{1}{z_3^{2025}} = 1$ ……………………………………………………………………….5p

c) Calculăm $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = |(z_1 + z_2 + z_3)^2| =$

$= |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2z_1z_2 + 2z_1z_3 + 2z_2z_3| = |0 + 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)| =$

$= 2|(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)| = 2\left|\overline{(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)}\right| = 2\left|(\overline{z_1z_2} + \overline{z_1z_3} + \overline{z_2z_3})\right| =$

$= 2\left|\frac{1}{z_1z_2} + \frac{1}{z_1z_3} + \frac{1}{z_2z_3}\right| = 2\left|\frac{z_1 + z_2 + z_3}{z_1z_2z_3}\right| = 2|z_1 + z_2 + z_3|$ 7p

Deci $|z_1 + z_2 + z_3|^2 = 2|z_1 + z_2 + z_3|$ de unde obținem $|z_1 + z_2 + z_3| \in \{0,2\}$ 3p