INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timișoara,
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683
registratura@isjtm.ro , www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Inspectoratul Școlar Județean Timiș　　Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
5.02.2026

Clasa a XII-a
Barem de corectare și notare

1. Determinaţi:

a) $\int \frac{x}{1+x+e^x} dx, x \in (0, \infty)$;

b) $\int \frac{1}{x^3+x^7} dx, x \in (0, \infty)$.

(Supliment Gazeta Matematică)

Soluție:

a) $I = \int \frac{x}{1+x+e^x} dx = \int \frac{1+x+e^x-(1+e^x)}{1+x+e^x} dx$ …………………………………………………….**5p**

$\mathrm{I} = \int dx - \int \frac{(1+x+e^x)'}{1+x+e^x} dx = x - \ln(1+x+e^x) + \mathrm{C}$……………………………..…………..**5p**

b) $\mathrm{I} = \int \frac{1}{x^3+x^7} dx = \int \frac{1}{x^3(1+x^4)} dx = \int \frac{1+x^4-x^4}{x^3(1+x^4)} dx = \int \frac{1}{x^3} dx - \int \frac{x}{1+x^4} dx$ …......……….**5p**

$\mathrm{I} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x^2 + \mathrm{C}$……………………………………………………………………**5p**

2. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că dacă $a, b \in G$, $a^2b = ba^2$ atunci $ab = ba$. Arătaţi că dacă $|G| = 2^n$, atunci $(G,\cdot)$ este grup abelian.

Soluție:

Fie $C_x = \{b \in G \mid xb = bx, x \in G\}$………………………..…………………………...………….....… **5p**

$C_a = \{b \in G \mid ab = ba\}$. Atunci are loc incluziunea $C_{a^2} \subseteq C_a$ ………………………….…..…..……. **5p**

Dar $C_a \subseteq C_a^2$. Se obţine $C_a = C_a^2$………………………………………........…………........……… **5p**

Deci $C_a = C_{a^2} = C_{a^4} = \cdots C_{a^{2n}} = C_e$, unde e este elementul neutru al grupului …...……….........… **5p**

.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timişoara,
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683
registratura@isjtm.ro , www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818

3. a) Arătaţi că orice primitivă a funcţiei $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\text{arctg}x+\frac{x^3}{3}-x$ este crescătoare;

b) Calculați $\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx, x\in\mathbb{R}, a,b,c\in R, a,b,c>0, a\neq b\neq c\neq a.$

Soluție:

a) Scrie $F'(x)=f(x), \forall x\in[0,\infty)$, unde $F:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcţiei f pe $[0,\infty)$.

Atunci $F''(x)=f'(x)=\frac{x^4}{1+x^2}$, $\forall x\in[0,\infty)$.. **5p**

Obține că $F'(x)\geqslant 0, \forall x\in[0,\infty)$, de unde concluzia. **5p**

b) Scrie integrala în forma:

$\int \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx=\frac{1}{c^2-a^2}\int\left(\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}-\frac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\right)dx$.......................... **2p**

Calculează integralele:

$\int\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx=\frac{1}{(b^2-a^2)}\left(\frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a}-\frac{1}{b}ax\text{tg}\frac{x}{b}\right)+C$.. **4p**

$\int\frac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}dx=\frac{1}{(b^2-a^2)}\left(\frac{1}{b}\text{arctg}\frac{x}{b}-\frac{a}{c}\text{arctg}\frac{x}{c}\right)+C$... **4p**

4. Fie $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi mulţimea $Q(\varepsilon)=\{a+b\varepsilon|a,b\in\mathbb{Q}\}$.

a) Calculați $(1+\varepsilon)^n, n\in N$;

b) Arătaţi că inversul oricărui element nenul din$(Q(\varepsilon),\cdot)$ este din $Q(\varepsilon)$;

c) Arătaţi că mulţimea $M=\{a^2-ab+b^2 \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui Z în raport cu înmulţirea numerelor întregi.

Soluție:

a) Deoarece $\varepsilon^3=1$ se obţine că $\varepsilon+1=-\varepsilon^2$.. **3p**

Atunci $(1+\varepsilon)^n=(-\varepsilon^2)^n=(-1)^n\varepsilon^{2n}, n\in\mathbb{N}$.. **3p**

Finalizare... **4p**

b) Demonstrează egalitatea $(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)=a^2-ab+b^2\neq 0$ **5p**

Obţine că $(a+b\varepsilon)^{-1}=\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}-\frac{b}{a^2-ab+b^2}\varepsilon$, de unde concluzia.................................. **5p**

c) Deduce că $(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)=(a+b\varepsilon)(a+b\varepsilon^2)(c+d\varepsilon)(c+d\varepsilon^2)=$

$=(a+b\varepsilon)\overline{(a+b\varepsilon)}(c+d\varepsilon)\overline{(c+d\varepsilon)}=|(a+b\varepsilon)(c+d\varepsilon)|^2=x^2-xy+y^2$ **5p**

Notează cu $x=ac-bd, y=ad+bc-bd, x,y\in\mathbb{Z}$ de unde rezultă concluzia.....................**5p**