



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
5.02.2026

Clasa a IX-a
Barem de corectare și notare

1. Rezolvați ecuația: $x + [x] = 13\{x\}$, unde $[x]$ și $\{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a lui x .

Soluție: Ecuația este echivalentă cu $6x = 7[x]$5p

Notăm $\frac{6}{7}x = k \in \mathbb{Z}$ și obținem $\left[\frac{7k}{6}\right] = k$5p

$k \in [0, 6) \cap \mathbb{Z}$5p

$x \in \left\{0, \frac{7}{6}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}, \frac{14}{3}, \frac{35}{6}\right\}$5p

2. Să se calculeze produsul următor și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Soluție: Avem $P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \frac{2+1}{2 \cdot 2}$; $P_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{4}{6} = \frac{3+1}{2 \cdot 3}$5p

Formulează propoziția: $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$10p

Demonstrează prin inducție matematică formula găsită.....5p

Soluție alternativă

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{(2-1)(2+1)}{2 \cdot 2} \cdot \frac{(3-1)(3+1)}{3 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n}.$$

După simplificare ajunge la $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$

3. Fie $x, y, z \in (0, \infty)$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right).$$



Soluție: Din inegalitatea mediilor $\frac{x^2+yz}{2} \geq \sqrt{x^2 \cdot yz} \Rightarrow x^2 + yz \geq 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2+yz} \leq \frac{\sqrt{yz}}{2xyz}$5p
 $\frac{1}{x^2+yz} + \frac{1}{y^2+zx} + \frac{1}{z^2+xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{yz}}{xyz} + \frac{\sqrt{zx}}{xyz} + \frac{\sqrt{xy}}{xyz} \right)$5p
Din $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Rightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \leq x + y + z$ 5p
Finalizare.....5p

4. Se consideră triunghiul ABC . Paralelele duse prin vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse se intersectează în punctele A', B', C' . Dacă H și H' sunt ortocentrele triunghiurilor ABC respectiv $A'B'C'$, demonstrați că: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HH'}$.

Soluție: Dacă A mijlocul $(B'C')$, avem $HA \perp BC$ și $B'C' \parallel BC$ obține $HA \perp B'C'$5p

Deduce HA mediatoarea segmentului $B'C'$. Analog HB, HC mediatoarele segmentelor $(C'A')$ și $(A'B')$5p

Obține H centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$5p

Din teorema Sylvester avem $\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HH'}$5p

A mijlocul segmentului $(B'C')$ atunci $\overrightarrow{HA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'})$. Analog $\overrightarrow{HB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HC'} + \overrightarrow{HA'})$, $\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'})$5p

Finalizare $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA'} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{HC'} = \overrightarrow{HH'}$5p