INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timişoara,
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683
registratura@isjtm.ro , www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Inspectoratul Şcolar Judeţean Timiş   Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
5.02.2026
Clasa a XI-a MI- BAREM

(30p) 1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\epsilon M_4(\mathbb{R})$.

Să se calculeze A^n și determinantul matricei A^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție:

Avem $A=-I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$	2p
Deoarece $B\cdot(-I_3)=(-I_3)\cdot B =>$ $$A^n=(-I_3+B)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot(-I_3)^{n-k}\cdot B^k=(-I_3)^n+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot(-1)^{n-k}\cdot B^k$$	4p
Cum $B^2=4B$, presupunând că $B^k=4^{k-1}\cdot B\Rightarrow B^{k+1}=B^k\cdot B=4^k\cdot B$ și conform metodei inducției matematice $=> B^n=4^{n-1}\cdot B,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$.	5p
$$A^n=(-I_3)^n+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k\cdot(-1)^{n-k}\cdot4^{k-1}\cdot B)=(-I_3)^n+\frac{B}{4}\sum_{k=1}^{n}(C_n^k\cdot(-1)^{n-k}\cdot4^k)=$$ $$=(-I_3)^n-(-1)^n\cdot\frac{B}{4}+\frac{B}{4}\sum_{k=0}^{n}(C_n^k\ (-1)^{n-k}\cdot4^k)=(-1)^n\left(I_3-\frac{B}{4}\right)+\frac{B}{4}\cdot(-1+4)^n=$$ $=(-1)^nI_3+\frac{3^n-(-1)^n}{4}B$	6p
Dacă notăm $a=\frac{3^n+3\cdot(-1)^n}{4}$ și $b=\frac{3^n-(-1)^n}{4}$ $=> A^n=\begin{pmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{pmatrix},\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*$	3p
Calculează $detA=-3$, de unde	7p
$det(A^n)=(det(A))^n=(-3)^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.	3p

(20p) 2. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+\dots+\frac{1}{n}C_n^n}{2^2+\frac{1}{2}\cdot 2^3+\dots+\frac{1}{n}\cdot 2^{n+1}}$.

Soluție:

Notează $x_n = C_n^1+\frac{1}{2}C_n^2+\dots+\frac{1}{n}C_n^n$ și $y_n = 2^2+\frac{1}{2}\cdot 2^3+\dots+\frac{1}{n}\cdot 2^{n+1}$ $y_{n+1}-y_n = \frac{2^{n+2}}{n+1} > 0,\ \forall\ n\in\mathbb{N}^* \Rightarrow (y_n)_{n\geq 1}$ este crescător .	4p
Cum $y_n > \frac{2^{n+1}}{n+1},\ \forall\ n\in\mathbb{N}^*$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{n+1}=\infty$ obține $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\infty$, $(y_n)_{n\geq 1}$ este nemărginit .	2p
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}^1+\frac{1}{2}C_{n+1}^2+\dots+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}-C_n^1-\frac{1}{2}C_n^2-\dots-\frac{1}{n}C_n^n}{\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+2}}$ $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_{n+1}^1-C_n^1+\frac{1}{2}(C_{n+1}^2-C_n^2)+\dots+\frac{1}{n}(C_{n+1}^n-C_n^n)+\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}}{\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+2}} =$	5p
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\dots+\frac{1}{n}C_n^{n-1}+\frac{1}{n+1}C_n^n}{\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+2}} =$	3p
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k}{\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}}{\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+2}} =$	3p
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^{k+1}}{\frac{1}{n+1}\cdot 2^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}} = \frac{1}{2}$. Conform lemei lui Stolz-Cesaro $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1}{2}$.	3p

(20p) 3. Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ de numere reale definit prin $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$, $n \geq 1$.

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}(x_1\cdot x_2\cdot \ldots \cdot x_n)$.

Soluție:

$x_1 = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2^2}$	2p
$x_2 = \cos\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{2^3}$	2p
Demonstrează prin inducţie matematică $x_n = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$	4p
Demonstrează $x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n = \cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\cos\frac{\pi}{2^3}\cdot\ldots\cdot\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$	8p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timișoara,
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683
registratura@isjtm.ro , www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818

$\lim\limits_{n\to\infty}(x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{2}{\pi}=\frac{2}{\pi}$.	4p

(20p) 4. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$ considerăm numerele a_n , $b_n\in\mathbb{N}$ astfel încât $\left(2+\sqrt{3}\right)^n=a_n+b_n\sqrt{3}$.

a) Arătați că $\left(2-\sqrt{3}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{3}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

b) Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

Soluție:

a)	
Fie $c_n, d_n\in\mathbb{Z}$ cu $c_n-d_n\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Arătăm că afirmația $P(n)$: $(a_n,b_n)=(c_n\,,d_n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$ Inducție Verificare: $P(0)$: $c_0-d_0\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^0=1\Rightarrow c_0=1, d_0=0$ Cum $a_0+b_0\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^0=1\Rightarrow a_0=1, b_0=0$ $\Rightarrow(a_0,b_0)=(1,0)=(c_0,d_0)\Rightarrow$ $P(0)$ adevărată	2p
Inducția : $P(n)\Rightarrow P(n+1)$. Presupunem că pentru orice $n\in\mathbb{N}$ oarecare are loc $P(n)$ și demonstrăm că atunci are loc și $P(n+1)$. $P(n)\Leftrightarrow(a_n,b_n)=(c_n,d_n)$ (1) $a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{n+1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=\left(a_n+b_n\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=$ $=(2a_n+3b_n)+(a_n+2b_n)\sqrt{3}\Rightarrow a_{n+1}=2a_n+3b_n$ și $b_{n+1}=a_n+2b_n$ (2)	4p
$c_{n+1}-d_{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{n+1}=\left(2-\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(c_n-d_n\sqrt{3}\right)^n\left(2-\sqrt{3}\right)=$ $=(2c_n+3d_n)-(c_n+2d_n)\sqrt{3}\Rightarrow c_{n+1}=2c_n+3d_n$ și $d_{n+1}=c_n+2d_n$ (3) Din (1), (2), (3) $\Rightarrow(a_{n+1},b_{n+1})=(c_{n+1}\,,d_{n+1})\Rightarrow$ $P(n+1)$ adevărată $\Rightarrow P(n),(\forall)n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^n=a_n-b_n\sqrt{3}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$	4p
b)	
$\begin{cases}a_n+b_n\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^n\\a_n-b_n\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a_n=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n\\2b_n\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}a_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}\\b_n=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2\sqrt{3}}\end{cases}$	4p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timișoara,
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683
registratura@isjtm.ro , www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{3}\cdot\left[(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n\right]}{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n} = \frac{\sqrt{3}\left(1+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n\right)}{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n}$	2p
Cum $0 < \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)^n = 0$	2p
$=> \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{3}(1+0)}{1-0} = \sqrt{3}$.	2p